UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Generación de semigrupos por operadores elípticos en c0 (Ω)

TESIS

Para optar el Título Profesional de

Licenciado en Matemática

AUTOR

Pedro David Huillca Leva

Lima – Perú

2014

Generación de semigrupos por operadores elípticos en $C_0(\Omega)$

Pedro David Huillca Leva

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. Pérez Salvatierra Alfonso
Presidente del Jurado

Dr. Ramos Chumpitaz Oswaldo
Miembro del Jurado

Dr. Izaguirre Maguiña Moisés
Miembro Asesor

Lima - Perú

Noviembre - 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

HUILLCA LEVA, PEDRO DAVID

Generación de semigrupos por operadores elípticos en $C_0(\Omega)$, (Lima) 2014.
ix, 91 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2014).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática
I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas.
II. Generación de semigrupos por operadores elípticos en $C_0(\Omega)$ (Ecuaciones Diferenciales Parciales).

"La mente que se abre a una nueva idea jamas vuelve a su tamaño original."

Albert Einstein

Agradecimentos

A mis padres, Gerardo y Fidelia, por todo el apoyo, motivación y consejos que siempre me brindan, por las fuerzas que me brindan en todo los momentos difíciles. A mis hermanos y sobrina por esos grandes momentos que compartimos en familia.

A mi enamorada, Elizabeth, por su gran amor y paciencia. Por escucharme, motivarme y entenderme. Por estar presente en los momentos importantes de mi vida.

A mi asesor, Dr. Moisés Izaguirre Maguiña, por aceptar ser mi asesor de Tesis. Por sus consejos, sugerencias tanto en el desarrollo de la tesis como en el aspecto personal.

A los profesores de la Facultad de Matemáticas que formaron parte de mi vida universitaria. Gracias por todo lo que me enseñaron durante esta etapa de mi vida.

A todos mis amigos(as) de la UNMSM con los que compartí gratos momentos durante el pre-grado.

Resumen

Generación de semigrupos por operadores elípticos en $C_0(\Omega)$

PEDRO DAVID HUILLCA LEVA

NOVIEMBRE- 2014

Orientador: Dr. Izaguirre Maguiña Moisés Raúl
Titulo obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo presentamos un estudio sobre la generación de semigrupos en $C_0(\Omega)$ por operadores elípticos en forma no divergente de orden 2 con coeficientes de segundo orden continuos, donde Ω satisface un propiedad geométrica: la condición del cono exterior uniforme.

PALABRAS CLAVES: SEMIGRUPOS
SEMIGRUPOS HOLOMORFOS
OPERADORES ELÍPTICOS
CONDICIÓN DEL CONO EXTERIOR UNIFORME

Abstract

Generation of semigroups for elliptic operators on $C_0(\Omega)$

PEDRO DAVID HUILLCA LEVA

NOVEMBER - 2014

Advisor: Dr. Izaguirre Maguiña Moisés Raúl
Degree: Licentiate in Mathematic

This work we present a study on the generation of semigroups on $C_0(\Omega)$ for elliptic operators in non-divergent form of order 2 with coefficients of second order continuous, where Ω satisfies a geometric property: the uniform exterior cone condition.

KEY WORDS: SEMIGROUPS
HOLOMORPHIC SEMIGROUPS
ELLIPTIC OPERATORS
UNIFORM EXTERIOR CONE CONDITION

Índice general

Introducción

En el primer capítulo estudiaremos los C_0-semigrupos y los semigrupos holomorfos, sus propiedades básicas y los teoremas que caracterizan sus generadores (las referencias para el Capítulo 1 son [11], [2], [7]). Mostraremos que si A es sectorial, entonces A genera un semigrupo holomorfo. Como consecuencia tenemos: si A genera un C_0-semigrupo holomorfo en X, entonces para cada $x \in X$ existe una única función $u \in C^\infty((0,\infty), X) \cap C([0,\infty), X) \cap C((0,\infty), D(A))$ satisfaciendo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \quad (t > 0) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

En el capítulo estudiaremos la generación de semigrupos en $C_0(\Omega)$. Para ello, consideraremos el operador $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{A}u := \sum_{i,j=1}^{n} -a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j u + cu$$

con coeficientes de valor real a_{ij}, b_j, c tales que $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $b_j, c \in L^\infty(\Omega)$ y Ω es un dominio limitado en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con frontera $\partial\Omega$.

En la sección 2.1 estableceremos algunas definiciones y resultados de ecuaciones elípticas de segundo orden, principalmente el Teorema 2.9 que es una consecuencia del Teorema de Harnack debil (Teorema 2.5). Las referencias para esta sección son [6], [12], [17], [14].

En la sección 2.2 mostramos la existencia de solución del problema $\mathcal{A}u = f$, $u_{|\partial\Omega} = 0$ en $C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$, donde $f \in L^n(\Omega)$, en dos casos. El primero es cuando Ω es Wiener regular y a_{ij} son Lipschitz continua (Teorema 2.10); y en el segundo, Ω satisface la condición del cono exterior y $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ (Teorema 2.11). Para eso nos apoyamos en los resultados da sección 1.

En la sección 2.3, mostraremos la equivalencia entre el problema de Poisson $\mathcal{A}u = f$, $u_{|\partial\Omega} = 0$ y el problema de Dirichlet $\mathcal{A}u = 0$, $u_{|\partial\Omega} = g$, donde $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ son dados, tal equivalencia será dado por el Teorema 2.12. Como consecuencia, cuando Ω es Wiener regular y los a_{ij} son Lipschitz continua, o Ω satisface la condición del cono exterior uniforme, el problema $Lu = f$, $u_{|\partial\Omega} = g$ tiene una única solución en $C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$, para cada $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$.

En la sección 2.4, consideraremos los operadores A_c y A_0 en $C(\overline{\Omega})$ y en $C_0(\Omega)$ respectivamente, como sigue

$$\begin{aligned} D(A_c) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) : Lu \in C(\overline{\Omega})\}, \\ A_c &= \mathcal{A}u, \\ D(A_0) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) : Lu \in C_0(\Omega)\}, \\ A_0 &= \mathcal{A}u. \end{aligned}$$

Así A_0 es la parte de A_c en $C_0(\Omega)$. Si Ω satisface la condición del cono exterior uniforme entonces $-A_c$ genera un semigrupo holomorfo limitado T en $C(\overline{\Omega})$ y operador $-A_0$ genera un $C_0(\Omega)$-semigrupo holomorfo limitado en $C_0(\Omega)$ (Teorema 2.15).

Notaciones

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto
- $\partial\Omega$ es la frontera de Ω
- $A \subset\subset \Omega$, esto es, A es un abierto limitado tal que $\overline{A} \subset \Omega$
- $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$
- $\operatorname{Re} z$ es la parte real de $z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{Im} z$ es la parte imaginaria de $z \in \mathbb{C}$
- $\Sigma_\theta := \{r\, \mathrm{e}^{i\gamma} \in \mathbb{C} : r > 0, -\theta < \gamma < \theta\}$
- X es un espacio de Banach
- $\mathcal{L}(X)$ es el espacio de las aplicaciones lineales continuas en X
- A es un operador lineal en X
- $D(A)$ es el dominio de A
- $\operatorname{Ran} A$ es la imagen de A
- $\operatorname{Ker} A$ es el núcleo de A
- $\rho(A)$ es el conjunto resolvente de A
- $R(\lambda, A) := \lambda I - A$ é o resolvente de A, donde $\lambda \in \rho(A)$
- $A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A)$ es la aproximación Yosida
- $C^j(\Omega)$ el conjunto de las funciones j veces continuamente diferenciables en Ω

- $C^j(\overline{\Omega})$ el conjunto de las funciones en $C^j(\Omega)$, cujas derivadas de orden $\leq j$ tiene extensión continua sobre $\overline{\Omega}$

- $C_B^j(\Omega)$ el conjunto de las funciones en $C^j(\Omega)$, cujas derivadas de orden $\leq j$ son limitadas sobre Ω

- $C^\alpha(\Omega) := \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} < \infty \right\}$

- $C_0(\Omega) := \{u \in C(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} = 0\}$

- $\widehat{C}^{j,p}(\Omega) := \{u \in C^j(\Omega) : \sum_{|\alpha|\leq j} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx < \infty\} \quad (1 \leq p < \infty)$

- $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$

- $K_R(y)$ es un cubo con centro en y y lados paralelos a los ejes coordenados y con longitud de lado R.

- $K_R := K_R(0)$

- Nf es el potencial newtoniano de f

Capítulo 1

Semigrupos

En este capítulo X denotará un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y usaremos la misma notación para la norma del espacio $\mathcal{L}(X)$. Estudiaremos las teoría básica de semigrupos. El objetivo de este capítulo es caracterizar los operadores lineales $A : D(A) \subset X \to X$ que generan un semigrupo holomorfo. El teorema central de este capítulo es el Teorema 1.14. Como consecuencia tenemos que el P.V.I

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x_0 \in X. \end{cases}$$

tiene una única solución (Corolario 1.8).

1.1 C_0-semigrupo

Definición 1.1. *Denotaremos* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. *Una función* $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ *tal que*

a) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad s, t \geq 0$

b) $T(0) = I \quad$ *(I es el operador identidad en X).*

es llamado un C_0-semigrupo *o un* semigrupo fuertemente continuo *si*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Si T satisface

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

entonces T es llamado un semigrupo uniformemente continuo.

Note que si T es un semigrupo uniformemente continuo entonces es un semigrupo fuertemente continuo.

El operador A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \tag{1.1}$$

y

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para } x \in D(A), \tag{1.2}$$

es llamado *generador infinitesimal*, o simplemente *generador*, del C_0-semigrupo $T(t)$, $D(A)$ es el dominio de A.

Ejemplo 1.1. *Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$. Definimos*

$$T(t)x = \mathrm{e}^{tA}\, x$$

entonces T define un C_0-semigrupo en X con generador A.

1.1.1 Propiedades de los semigrupos uniformemente continuos

De la definición y de la propiedad de semigrupo, si $T(t)$ es semigrupo uniformemente continuo entonces

$$\lim_{s \to t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Teorema 1.1. *Un operador A es el generador de un semigrupo uniformemente continuo, si y sólo si, A es un operador lineal limitado.*

Demostración. Sea A un operador lineal limitado en X, y sea

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{1.3}$$

La serie del lado derecho de (1.3) converge en la norma de $\mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y define para cada t un operador lineal limitado $T(t)$. Note que $T(0) = I$ y $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Estimando la serie de potencias tenemos

$$\|T(t) - I\| \leq t\|A\|\, \mathrm{e}^{t\|A\|}$$

y

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \|A\| \|T(t) - I\|.$$

Esto implica que $T(t)$ es un semigrupo uniformemente continuo cuyo generador es A.

Sea $T(t)$ un semigrupo uniformemente continuo en X. Sea $\rho > 0$ fijo tal que $\|I - 1/\rho \int_0^\rho T(s)\,ds\| < 1$. Entonces $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s)\,ds$ es invertible y, por tanto, $\int_0^\rho T(s)\,ds$ también es invertible. Ahora

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^\rho T(s)\,ds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\rho T(h+s)\,ds - \int_0^\rho T(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^{\rho+h} T(s)\,ds - \int_0^\rho T(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)\,ds - \int_0^h T(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{T(h)-I}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)\,ds - \int_0^h T(s)\,ds\right)\left(\int_0^\rho T(s)\,ds\right)^{-1}.$$

Haciendo $h \to 0$, $\frac{T(h)-I}{h}$ converge en la norma de $\mathcal{L}(X)$ para $(T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(s)\,ds\right)^{-1}$, que es el generador de $T(t)$. ■

Teorema 1.2. *Si $T(t)$ y $S(t)$ son semigrupos uniformemente continuos y*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t}, \tag{1.4}$$

entonces $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. Mostraremos que dado un $\tau > 0$, $S(t) = T(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$. Sea $\tau > 0$ fijo y $C > 0$ tal que $\|T(t)\|\|S(s)\| \leq C$, $0 \leq t, s \leq \tau$. Dado $\epsilon > 0$ sigue de (1.4) que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|T(h) - S(h)\| < \epsilon h/C\tau, \quad 0 \leq h \leq \delta. \tag{1.5}$$

Escogemos $n \geq 1$ tal que $t/n < \delta$ para todo $t \in [0,\tau]$. De la propiedad de semigrupos y de (1.5)

$$\begin{aligned}
&\|T(t) - S(t)\| = \left\|T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right\|\left\|T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|\left\|S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\| \leq Cn\frac{\epsilon}{\tau C}\frac{t}{n} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario entonces $T(t) = S(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$, así la prueba está completa. ■

Corolario 1.1. *Sea $T(t)$ un semigrupo uniformemente continuo. Entonces*

a) Existe $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}$.

b) Existe un único operador lineal limitado A tal que $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

c) El operador A en (b) es el generador de $T(t)$.

d) $t \mapsto T(t)$ es diferenciable en norma y

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demostración. Todas las afirmaciones siguen de b). Para probar b) note que el generador de $T(t)$ es un operador lineal limitado A. A también es el generador de e^{tA} y por tanto, por el Teorema 1.2, $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$. ■

1.1.2 Propiedades básicas de los C_0-semigrupos

Teorema 1.3. *Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo, entonces existen constantes $w \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que*

$$\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Demostración. Primero mostraremos que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ es limitado para $0 \leq t \leq \eta$. En efecto, caso contrario para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $t_n \in [0, 1/n]$ tal que $\|T(t_n)\| > n$. Por el Principio de Acotación Uniforme existiría $x \in X$ tales que $\{\|T(t_n)x\| : n \in \mathbb{N}\}$ no es limitado, lo que es una contradicción. Luego, existe $\eta > 0$ tales que $\sup_{t\in[0,\eta]}\|T(t)\| = M < \infty$. Dado $t \geq 0$ existe único $\delta \in [0, \eta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $t = n\eta + \delta$ donde $0 \leq \delta \leq \eta$. De la propiedad de semigrupo

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\eta} = M\,\mathrm{e}^{wt},$$

donde $w = \eta^{-1}\ln M$. ■

Definición 1.2. *Una función $T : I \to \mathcal{L}(X)$ ($I \subset \mathbb{R}$) es llamada* fuertemente continua *si $I \ni t \mapsto T(t)x \in X$ es continua para todo $x \in X$.*

Corolario 1.2. *Si $T(t)$ es un C_0-semigrupo entonces $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ es fuertemente continua.*

Teorema 1.4. *Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo y A su generador. Entonces*

a) Para $x \in X$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x. \tag{1.6}$$

b) Para cada $x \in X$, $\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$ y

$$A\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = T(t)x - x. \tag{1.7}$$

c) Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{1.8}$$

d) Para $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau. \tag{1.9}$$

Demostración. El ítem $a)$ sigue directamente de la continuidad de $t \mapsto T(t)$. Para probar $b)$ note que, dado $x \in X$ $h > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\, ds &= \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\, ds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\, ds\end{aligned}$$

que tiende a $T(t)x - x$ cuando $h \to 0$. Para probar $c)$ note que, dados $x \in D(A)$ y $h > 0$,

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} T(t)Ax. \tag{1.10}$$

sigue que $T(t)x \in D(A)$ y $AT(t)x = T(t)Ax$. (1.10) también implica que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

probando así que la derivada por la derecha de $T(t)x$ es $T(t)Ax$. Para probar (1.8) tenemos que mostrar que para $t > 0$ la derivada por la izquierda de $T(t)x$ existe y es igual a $T(t)Ax$. Esto sigue de

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax = T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right) + (T(t-h) - T(t))Ax,$$

que tiende a cero cuando $h \to 0^+$, puesto que $x \in D(A)$, $\|T(t-h)\|$ es limitado en $0 \leq h \leq t$ y $T(t)$ es fuertemente continuo . Esto concluye la prueba de c. El ítem d) es obtenido del ítem c) integrando de s a t. ■

Teorema 1.5. *Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador del C_0-semigrupo $T(t)$. Entonces $D(A)$ es denso y A es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X$ y denotemos $x_t = 1/t \int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$ ($t > 0$). Del Teorema 1.4 b), $x_t \in D(A)$ para $t > 0$, y del Teorema 1.4 a), $x_t \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} x$. Entonces $x \in \overline{D(A)}$. Para probar que A es cerrado, sea $x_n \in D(A)$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $Ax_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, del Teorema 1.4 d)

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\, ds. \tag{1.11}$$

El integrando en (1.11) converge $T(s)y$ uniformemente en intervalos limitados. Por tanto, haciendo $n \to \infty$ en (1.11)

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\, ds. \tag{1.12}$$

Dividiendo por t y haciendo $t \to 0^+$, usando el Teorema 1.4 a), concluimos que $x \in D(A)$ y $Ax = y$. ■

Teorema 1.6. *Sean $T(t)$ y $S(t)$ C_0-semigrupos con generadores A y B, respectivamente. Si $A = B$ entonces $T(t) = S(t)$.*

Demostración. Sea $x \in D(A) = D(B)$. La función $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ es diferenciable y

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Por tanto $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ es constante y en particular sus valores en $s = 0$ y $s = t$ son iguales, esto es, $S(t)x = T(t)x$. Esto vale para todo $x \in D(A)$. De la densidad de $D(A)$ y de la continuidad de $T(t)$ y $S(t)$ sigue que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$. ■

Teorema 1.7. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $T(t)$. Si $D(A^n)$ es el dominio de A^n, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ es denso en X.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$

$$y = x(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\,ds. \tag{1.13}$$

Si $h > 0$ es suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}y &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h)x - T(s)x]\,ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{h}[\varphi(s-h) - \varphi(s)]T(s)x\,ds \end{aligned} \tag{1.14}$$

El integrando del lado derecho de (1.14) converge para $-\varphi'(s)T(s)x$ cuando $h \to 0$ uniformemente en $[0,\infty)$. Por tanto $y \in D(A)$ y

$$Ay = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h}y = -\int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x\,ds$$

Repitiendo el proceso, tenemos

$$A^n y = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)T(s)x\,ds, \qquad \text{para } n = 1, 2\ldots$$

Sigue que $y \in \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$. Sea $Y = \{x(\varphi) : x \in X, \varphi \in C_0^\infty((0,\infty))\}$. Por lo que acabamos de probar $Y \subset \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$. Para concluir mostraremos que Y es denso en X. Si Y no es denso en X, por el Teorema de Hahn Banach existe $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $x^*(y) = 0$ para todo $y \in Y$. Entonces

$$\int_0^\infty \varphi(s)x^*(T(s)x)\,ds = x^*\left(\int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\,ds\right) = 0 \tag{1.15}$$

para todo $x \in X$, $\varphi \in C_0^\infty((0,\infty))$. Esto implica que para cada $x \in X$ a función continua $s \mapsto x^*(T(s)x)$ es identicamente nula en $[0,\infty)$. En particular para $s = 0$, $x^*(x) = 0$ para todo $x \in X$, contradiciendo la elección de x^*. ■

1.1.3 Teorema de Hille-Yosida

En esta subsección caracterizaremos el generador de un C_0-semigrupo de contracciones. Daremos condiciones necesarias y suficientes sobre el comportamiento del resolvente de un operador A, para que A sea generador de un C_0-semigrupo de contracciones.

Definición 1.3. *Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo, decimos que T es* uniformemente limitado *si* *existe un* $M > 0$ *tal que* $\|T(t)\| \leq M$ *para todo* $t \geq 0$ *. Si, ademas,* $M = 1$ *diremos que* T *es un* semigrupo de contracciones*.*

Teorema 1.8 (Hille-Yosida)**.** *Un operador lineal* A *es el generador de un* C_0*-semigrupo de contracciones* $T(t)$*, si y sólo si,*

i) A *es cerrado y densamente definido,*

ii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$ *y*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Antes de hacer la prueba del teorema probaremos los siguientes lemas.

Lema 1.1. *Si* A *satisface las condiciones* $i)$ *y* $ii)$ *del Teorema 1.8 entonces*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall\, x \in X.$$

Demostración. Sea $x \in D(A)$, entonces para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0, \quad \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Como $D(A)$ es denso en X y $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$, entonces $\lambda R(\lambda, A)x \to x$ cuando $\lambda \to \infty$, para todo $x \in X$. ■

Para $\lambda > 0$, definimos la *aproximación Yosida* de A por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \tag{1.16}$$

A_λ es una aproximación de A en el siguiente sentido:

Lema 1.2. *Si* A *satisface* $i)$ *y* $ii)$ *del Teorema 1.8. Si* A_λ *es la aproximación Yosida de* A*, entonces*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax, \quad x \in D(A).$$

Demostración. Para $x \in D(A)$, tenemos del Lema 1.1 y de la definición de A_λ que

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$ ■

Lema 1.3. *Si* A *satisface* $i)$ *y* $ii)$ *del Teorema 1.8 y* A_λ *es la aproximación Yosida de* A*, entonces* A_λ *es el generador de un semigrupo uniformemente continuo de contracciones* e^{tA_λ}*. Además,* *para cada* $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ *tenemos*

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demostración. Es claro que A_λ es un operador lineal limitado, consecuentemente, es el generador del semigrupo uniformemente continuo e^{tA} (Teorema 1.1). También tenemos

$$\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A) - t\lambda I}\| = \|e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|} \leq 1$$

y por tanto e^{tA_λ} es un semigrupo de contracciones. Note que e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ y A_μ conmutan entre sí. Así

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x)\, ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 t \left\| e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) \right\| ds \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Demostración del Teorema 1.8. Si A es generador de un C_0-semigrupo entonces $i)$ sigue del Teorema 1.5. Para $\lambda > 0$ y $x \in X$, definimos

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt. \tag{1.17}$$

Como $t \mapsto T(t)x$ es continua y uniformemente limitada la integral existe como integral impropia de Riemann y define un operador lineal limitado satisfaciendo

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|x\|\, dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|. \tag{1.18}$$

Note que, para $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h) - T(t))x\, dt \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T(t)x\, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\
&= \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x\, dt, \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

y el lado derecho de (1.19) converge a $\lambda R(\lambda)x - x$ cuando $h \to 0^+$. Entonces para todo

$x \in X$ y $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ y

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \tag{1.20}$$

Si $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} AT(t)x\,dt = \int_0^\infty A(\mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x)\,dt \\ &= A\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right) = AR(\lambda)x. \end{aligned} \tag{1.21}$$

De (1.20) y (1.21) sigue

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = Ix, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Así $R(\lambda)$ es la inversa de $\lambda I - A$ para todo $\lambda > 0$ y satisface la estimativa deseada.

Recíprocamente, sea $x \in D(A)$, tenemos

$$\|\mathrm{e}^{tA_\lambda} x - \mathrm{e}^{tA_\mu} x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\|,$$

luego, del Lema 1.2, $\mathrm{e}^{tA_\lambda} x$ converge cuando $\lambda \to \infty$ y la convergencia es uniforme en intervalos limitados. Sea $x \in X$, por densidad tenemos que dado $\epsilon >$ existe un $y \in D(A)$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$, como $\|\mathrm{e}^{tA_\lambda}\| \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned} \|\mathrm{e}^{tA_\lambda} x - \mathrm{e}^{tA_\mu} x\| &\leq \|\mathrm{e}^{tA_\lambda} x - \mathrm{e}^{tA_\lambda} y\| + \|\mathrm{e}^{tA_\lambda} y - \mathrm{e}^{tA_\mu} y\| + \|\mathrm{e}^{tA_\mu} y - \mathrm{e}^{tA_\mu} x\| \\ &\leq 2\|x - y\| + \|\mathrm{e}^{tA_\lambda} y - \mathrm{e}^{tA_\mu} y\| \leq 2\epsilon + \|\mathrm{e}^{tA_\lambda} y - \mathrm{e}^{tA_\mu} y\|. \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda} x = T(t)x, \quad \forall\, x \in X \tag{1.22}$$

y el límite es uniforme en intervalos limitados. Es fácil verificar que T satisface $T(0) = I$, $T(s + t) = T(s)T(t)$ y $\|T(t)\| \leq 1$. Además $t \mapsto T(t)x$ es continua en $[0, \infty)$ pues es límite uniforme de funciones continuas $t \mapsto \mathrm{e}^{tA_\lambda} x$. Entonces T es un C_0-semigrupo de contracciones en X. Para concluir la prueba mostraremos que A es generador de T. Sea $x \in D(A)$, usando (1.22) y Teorema 1.4,

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to \infty} (\mathrm{e}^{tA_\lambda} x - x) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t \mathrm{e}^{sA_\lambda} A_\lambda x\,ds = \int_0^t T(s)Ax\,ds \tag{1.23}$$

la última igualdad sigue de la convergencia uniforme de $\mathrm{e}^{sA_\lambda} A_\lambda x$ para $T(s)Ax$ en intervalos limitados. Sea B el generador de T, sea $x \in D(A)$ dividiendo (1.23) por t y tomando límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax,$$

así $x \in D(B)$ y $Bx = Ax$. Como B es generador de $T(t)$ sigue que $1 \in \rho(B)$. Por otro lado, de $ii)$ $1 \in \rho(A)$ y $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$ (pues $D(A) \subset D(B)$). Luego $D(A) = D(B)$ y $A = B$. ■

Corolario 1.3 (Hille-Yosida). *Un operador lineal A es el generador de un C_0-semigrupo de contracciones $T(t)$, si y sólo si,*

(i) A es cerrado y densamente definido,

(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\ \lambda}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0.$$

Demostración. La demostración es análoga al teorema anterior. ■

Corolario 1.4. *Sea A es generador de un C_0-semigrupo de contracciones T. Si A_λ es aproximación Yosida de A entonces*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda} x, \quad x \in X.$$

Demostración. De la prueba del Teorema 1.8 sigue que $S(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}$ define un C_0-semigrupo de contracciones con generador A. Del Teorema 1.6 sigue que $S = T$. ■

Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo satisfaciendo $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}$ (para algún $w \in \mathbb{R}$). Considere $S(t) = \mathrm{e}^{-wt}\, T(t)$. Es claro que $S(t)$ es un C_0-semigrupo de contracciones. Si A es el generador de $T(t)$ entonces $A - wI$ es el generador de $S(t)$. Por otro lado, si A es generador de un C_0-semigrupo de contracciones $S(t)$ entonces $A + wI$ es el generador de C_0-semigrupo de $T(t)$ satisfaciendo $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}$, más aún $T(t) = \mathrm{e}^{wt}\, S(t)$. Esta observación nos lleva a la siguiente caracterización del generador de un C_0-semigrupo satisfaciendo $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}$.

Corolario 1.5. *Un operador lineal A es generador de un C_0-semigrupo $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}$, si y sólo si,*

(i) A es cerrado y densamente definido,

(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > w\} \subset \rho(A)$ *y*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\ \lambda - w}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > w.$$

1.1.4 Caracterización del generador de un C_0-semigrupo

En esta sección caracterizaremos los generadores de los C_0-semigrupos en general.

Lema 1.4. *Sea A un operador lineal tal que $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Si*

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0,$$

entonces existe una norma $|\cdot|$ en X que satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad x \in X, \tag{1.24}$$

$$|\lambda R(\lambda, A)x| \leq |x|, \quad x \in X, \ \lambda > 0. \tag{1.25}$$

Demostración. Sea $\mu > 0$ y

$$\|x\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|.$$

Entonces

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\| \tag{1.26}$$

y

$$\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1. \tag{1.27}$$

Afirmamos que $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1$ para $0 < \lambda \leq \mu$. En efecto, si $y = R(\lambda, A)x$ entonces $y = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y)$ y por (1.27)

$$\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu$$

luego $\lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$.
De esto y de (1.26)

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad 0 < \lambda \leq \mu. \tag{1.28}$$

Tomando supremo sobre n tenemos $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \leq \mu$. Finalmente, definimos

$$|x| = \lim_{\mu \to \infty} \|x\|_\mu.$$

Entonces, de (1.26) sigue $\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$ para $x \in X$. Tomando $n = 1$ en la segunda desigualdad de (1.28) y haciendo $\mu \to \infty$ sigue $|\lambda R(\lambda, A)| \leq 1$. ■

Teorema 1.9. *A es generador de un C_0-semigrupo T satisfaciendo $\|T(t)\| \leq M$, si y sólo si,*

i) A es cerrado y densamente definido,

ii) $\rho(A) \supset (0, \infty)$ y

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \forall\, \lambda > 0,\ n = 1, 2 \ldots.$$

Demostración. Sea A el generador de un C_0-semigrupo tal que $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$. Definimos

$$|x| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\|.$$

Entonces

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\| \tag{1.29}$$

y por tanto $|\cdot|$ es una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$. Además

$$|T(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s \geq 0} \|T(s)x\| = |x|$$

y $T(t)$ es un C_0-semigrupo de contracciones en X con la norma $|\cdot|$, sigue del Teorema de Hille-Yosida que A es cerrado y densamente definido en la topología de la norma $|\cdot|$ y $|R(\lambda, A)| \leq \lambda^{-1}$ para $\lambda > 0$. De (1.29), A es cerrado, densamente definido y

$$\|R(\lambda, A)^n x\| \leq |R(\lambda, A)^n x| \leq \frac{1}{\lambda^n}|x| \leq \frac{M}{\lambda^n}\|x\|.$$

Recíprocamente, si $i)$ y $ii)$ están satisfechas, del Lema 1.4, existe una norma $|\cdot|$ en X que satisface (1.24) y (1.25). Considerando X con esta norma, A es cerrado, densamente definido, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y $|R(\lambda, A)| \leq \lambda^{-1}$ para $\lambda > 0$. Del Teorema de Hille-Yosida, A es el generador de un C_0-semigrupo de contracciones en X con la norma $|\cdot|$. Volviendo a la norma original, A es generador de $T(t)$ y

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad \forall\, x \in X.$$ ■

Corolario 1.6. *A es generador de un C_0-semigrupo $T(t)$ satisfaciendo $\|T(t)\| \leq M$, si y sólo si,*

i) A es cerrado y densamente definido,

ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > 0\}$ y

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^n}, \quad \mathrm{Re}\ \lambda > 0,\ n = 1, 2 \ldots.$$

Demostración. Sigue del Corolario 1.3 y de la primera parte de la prueba del Teorema 1.9. ■

Si $T(t)$ es un C_0-semigrupo en X con generador A entonces $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$ donde $M \geq 1$, $w \in \mathbb{R}$. Si $S(t) = \mathrm{e}^{wt}\,T(t)$, entonces $\|S(t)\| \leq M$ y $A - wI$ es el generador de $S(t)$. Usando esta observación y el Corolario 1.6 obtenemos:

Teorema 1.10. *A es generador de un C_0-semigrupo T satisfaciendo $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$, si y sólo si*

i) A es cerrado y densamente definido

ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > w\}$ y

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\ \lambda - w)^n}, \quad \mathrm{Re}\ \lambda > w,\ n = 1, 2 \ldots.$$

Teorema 1.11. *Sea A generador de un C_0-semigrupo $T(t)$ en X. Si A_λ es aproximación Yosida de A, esto es, $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)$, entonces*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}\,x, \quad x \in X. \tag{1.30}$$

Demostración. Comenzaremos con $w = 0$, esto es, $\|T(t)\| \leq M$ para $t \geq 0$. En la prueba del Teorema 1.9 tomamos una norma $|\cdot|$ en X equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $T(t)$ es un C_0-semigrupo de contracciones. De Corolario 1.4 sigue que $|\,\mathrm{e}^{tA_\lambda}\,x - T(t)x| \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De la equivalencia de normas (1.29) vale que $\|\mathrm{e}^{tA_\lambda}\,x - T(t)x\| \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente para todo compacto en $[0, \infty)$ y para todo $x \in X$. Para el caso general tenemos que $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$, si $w \leq 0$ entonces $\|T(t)\| \leq M$ y ya tenemos probado en este caso. Resta probar para $w > 0$. Para $\lambda > 2w$ tenemos

$$\|\mathrm{e}^{tA_\lambda}\| \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}\|\mathrm{e}^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\| \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2)^k t^k}{k!}\|R(\lambda, A)^k\|$$

$$\leq \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2)^k t^k}{k!(\lambda - w)^k} M = M\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda - w}} \leq M\,\mathrm{e}^{2wt}\,. \tag{1.31}$$

Consideremos el C_0-semigrupo uniformemente limitado $S(t) = \mathrm{e}^{-wt}\,T(t)$ con generador $A - wI$. Por la primera parte de la prueba tenemos

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{t(A-wI)_\lambda + wt}\,x, \quad x \in X. \tag{1.32}$$

Vamos mostrar que

$$(A - wI)_\lambda + wI = A_{\lambda + w} + H(\lambda)$$

donde

$$H(\lambda) = 2wI - w(w + 2\lambda)R(\lambda + w, A) = w[wR(\lambda + w, A) - 2AR(\lambda + w, A)]$$

Además $\|H(\lambda)\| \leq 2w + (2w + \lambda^{-1}w^2)M$ y $\|H(\lambda)x\| \stackrel{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} 0$ para $x \in D(A)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(A - wI)_\lambda + wI &= \lambda^2 R(\lambda, A - wI) - \lambda I + wI = \lambda^2 R(\lambda + w, A) - \lambda I + wI \\
&= (\lambda + w)^2 R(\lambda + w, A) - 2w(\lambda + w)R(\lambda + w, A) \\
&\quad + w^2 R(\lambda + w, A) - (\lambda - w)I \\
&= (\lambda + w)^2 R(\lambda + w, A) - (\lambda + w)I + 2wI \\
&\quad - 2w(\lambda + w)R(\lambda + w, A) + w^2 R(\lambda + w, A) \\
&= A_{\lambda + w} + H(\lambda)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|H(\lambda)\| &\leq 2w + w(w + 2\lambda)\|R(\lambda + w, A)\| \leq 2w + w(w + 2\lambda)M/\lambda \\
&= 2w + (2w + \lambda^{-1}w^2)M.
\end{aligned}$$

Si $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
\|H(\lambda)x\| &= w\|wR(\lambda + w, A)x - 2AR(\lambda + w, A)x\| \\
&= w\|wR(\lambda + w, A)x - 2R(\lambda + w, A)Ax\| \\
&\leq w^2\|R(\lambda + w, A)x\| + 2\|R(\lambda + w, A)Ax\| \\
&\leq \frac{M}{\lambda}(w^2\|x\| + 2w\|Ax\|) \to 0 \quad \text{cuando } \lambda \to \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, de la densidad de $D(A)$ en X, $H(\lambda)x \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ para todo $x \in X$.

Como

$$\|e^{tH(\lambda)}\, x - x\| \leq t\, e^{tH(\lambda)} \|H(\lambda)x\|, \quad \forall\, x \in X \tag{1.33}$$

sigue

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tH(\lambda)}\, x = x \quad x \in X. \tag{1.34}$$

Ya que $H(\lambda)$ y $A_{\lambda+w}$ conmutan tenemos

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}\, x - T(t)x\| &\leq \|e^{tA_\lambda + tH(\lambda-w)}\, x - T(t)x\| + \|e^{tA_\lambda + H(\lambda-w)}\, x - e^{tA_\lambda}\, x\| \\
&\leq \|e^{tA_\lambda + tH(\lambda-w)}\, x - T(t)x\| + \|e^{tA_\lambda}\| \|e^{tH(\lambda-w)}\, x - x\|.
\end{aligned}$$

Cuando $\lambda \to \infty$ el primer término del lado derecho de la expresión de arriba tiende a cero por (1.32), en cuanto el segundo término tiende a cero por (1.31) y (1.34). Luego sigue (1.30). ■

Ejemplo 1.2. *Sea $X = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ con la norma del supremo. Definimos el operador A es dado por*

$$\begin{aligned}
Af &= -f' \\
D(A) &= \{f : f \in C'[0,1], f(0) = f'(0) = 0\}
\end{aligned}$$

A es densamente definido y cerrado. Su resolvente puede ser calculado fácilmente

$$R(\lambda, A) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, f(s)\, ds$$

para $t \in [0,1]$, $f \in C([0,1])$. Mas aún

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Entonces A genera un C_0-semigrupo

$$(T(t)f)(s) = \begin{cases} f(s-t) & , t \leq s \\ 0 & , t > s \end{cases}$$

1.2 Semigrupos holomorfos

En esta sección estudiaremos las principales propiedades de los semigrupos holomorfos. Para ello empezaremos dando un definición que generaliza la definición de

C_0-semigrupos

Definición 1.4. *Una función fuertemente continua* $T : (0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ *tal que satisface*

a) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad t, s > 0.$

b) $\|T(t)\| \leq c, \quad t \in (0, 1].$

c) $T(t)x = 0 \ \forall\, t > 0$ *implica* $x = 0.$

es llamada semigrupo *en* X *.*

Se prueba de manera similar al Teorema 1.3 que

Lema 1.5. *Si* T *es un semigrupo entonces existen* $w \in \mathbb{R}$ *y* $M > 0$ *tales que* $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$ *para* $t > 0$.

Proposición 1.1. *Sea* T *un semigrupo entonces existe operador lineal* $A : D(A) \subset X \to X$ *tal que* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > w\} \subset \rho(A)$ *para algún* $w \in \mathbb{R}$ *y*

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > w.$$

Demostración. Por el Lema 1.5 tenemos que $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$ para $t > 0$. Sean $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda > w\}$ y $R : \Omega \to \mathcal{L}(X)$ dado por $R(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)dt$. Para $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\lambda$, por el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\mu - \lambda} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\, R(\lambda)\, dt - \int_0^\infty \frac{1}{\mu - \lambda}\, \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s)\, ds\, dt - \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s)\, ds\, dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s)\, ds\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(s-t)}\, T(s)\, ds\, dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s+t)\, ds\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s)\, ds \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t}\, T(t)\, dt \\
&= R(\lambda)R(\mu).
\end{aligned}$$

O sea, R es un pseudo-resolvente Sea $x \in \operatorname{Ker} R(\lambda)$, de la igualdad anterior $R(\mu)x = 0$ para todo μ con $\operatorname{Re}\,\mu > w$. Entonces $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)x\, dt = 0$ para todo Re $\lambda > w$, sigue que $T(t)x = 0$ para $t > 0$ ([16], Teorema 8.1.2). Luego por la propiedad $c)$ tenemos que $x = 0$. Por tanto, por el Teorema B.5, existe un operador A en X tal que $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ para $\lambda \in \Omega$. ∎

Definición 1.5. *El operador A definido por el teorema anterior es llamado* generador *de T.*

Note que el generador es único y no necesariamente densamente definido. Además, si T es un C_0-semigrupo las definiciones de generadores coinciden.

Teorema 1.12. *Un semigrupo es un C_0-semigrupo, si y sólo si, su generador A es densamente definido.*

Demostración. Supongamos que A, densamente definido, es el generador de un semigrupo T A . Como $R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)dt$ para $\lambda > w$, entonces

$$R(\lambda, A)^{(n)} = \int_0^\infty (-t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)dt, \quad \lambda > w.$$

Además $R(\lambda, A)^{n+1} = \frac{(-1)^n R(\lambda,A)^{(n)}}{n!}$, $\lambda \in \rho(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Así

$$R(\lambda, A)^{n+1} = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)dt$$

$\lambda > w$, $n \in \mathbb{N}$ y

$$\|R(\lambda, A)^{n+1}\| \leq M \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-(\lambda-w)t} \; dt.$$

Como $\int_0^\infty \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-(\lambda-w)t} T(t)\, dt = \frac{1}{(\lambda-w)^{n+1}}$, tenemos

$$\|(\lambda - w)^{n+1} R(\lambda, A)^{n+1}\| \leq M.$$

Del Teorema 1.10 A es el generador de un C_0-semigrupo T_0. Como $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_0(t)\, dt$ para $\lambda > w$, sigue que $T = T_0$. ■

Definición 1.6. *Sea $\theta \in (0, \pi/2]$. Un semigrupo T en X es llamado* semigrupo holomorfo de ángulo θ *si tiene una extensión holomorfa a Σ_θ que es limitada en $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ para todo $\theta' \in (0, \theta)$.*

Denotaremos la extensión de T a Σ_θ también por T. Si no queremos especificar el ángulo θ de la extensión en la definición, diremos que un semigrupo T es holomorfo si es holomorfo de ángulo θ para algún $\theta \in (0, \pi/2]$.

Proposición 1.2. *Sea $\theta \in (0, \pi/2]$ y T un semigrupo en X con generador A. Suponga que T es holomorfo de ángulo θ. Entonces vale lo siguiente:*

a) $T(z + z') = T(z)T(z')$, $\forall\ z, z' \in \Sigma_\theta$.

b) Para cada $\theta' \in (0,\theta)$ existen $M > 0$ y $w \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|T(z)\| \leq M\,\mathrm{e}^{w\,\mathrm{Re}\,z}, \quad \forall\, z \in \Sigma_{\theta'}.$$

c) Sea $\alpha \in (-\theta,\theta)$, entonces $T_\alpha(t) := T(\mathrm{e}^{i\alpha}\,t)$ ($t > 0$) es semigrupo y $\mathrm{e}^{i\alpha}A$ es el generador de T_α.

d) Si T es un C_0-semigrupo entonces

$$\lim_{z\to 0,\, z\in\Sigma_{\theta'}} T(z)x = x$$

para todo $x \in X$ y $\theta' \in (0,\theta)$.

Demostración. $a)$ Sea $z' \in (0,\infty)$ fijo consideremos las funciones holomorfas $z \mapsto T(z+z')$ y $z \mapsto T(z)T(z')$, $z \in \Sigma_\theta$. Como las dos funciones coinciden en $(0,\infty)$ el Teorema A.1 implica que $T(z+z') = T(z)T(z')\ \forall\, z \in \Sigma_\theta$ y $z' \in (0,\infty)$. Para $z \in \Sigma_\theta$ fijo las funciones holomorfas $z' \mapsto T(z+z')$ y $z' \mapsto T(z)T(z')$ definidos en Σ_θ coinciden para $z' \in (0,\infty)$. Luego por el Teorema A.1, tenemos que $T(z+z') = T(z)T(z')\ \ \forall\, z, z' \in \Sigma_\theta$.

$b)$ Sea $\theta' \in (0,\theta)$, $M \geq 1$ tal que $\|T(z)\| \leq M\ \forall\, z \in \Sigma_{\theta'},\ |z| \leq 1$ y tomemos $w_0 = \ln M$. Entonces $\|T(z)\| \leq M\,\mathrm{e}^{w_0|z|}\ \ \forall\, z \in \Sigma_{\theta'}$. En efecto, sea $z = t\,\mathrm{e}^{i\beta}$, $|\beta| < \theta'$, $t > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $s \in (0,1)$ tal que $t = n + s$, así

$$\|T(z)\| = \|T(n\,\mathrm{e}^{i\beta})T(s\,\mathrm{e}^{i\beta})\| \leq MM^n \leq M\,\mathrm{e}^{w_0 t} = M\,\mathrm{e}^{w_0|z|}\,.$$

Como $|z| \leq \frac{\mathrm{Re}\,z}{\cos\theta'}\ \ \forall\, z \in \Sigma_{\theta'}$, escogiendo $w = \frac{w_0}{\cos\theta'}$ tenemos

$$\|T(z)\| \leq M\,\mathrm{e}^{w\,\mathrm{Re}\,z}, \quad z \in \Sigma_{\theta'}.$$

$c)$ Sea A_α el generador de T_α. Consideremos $R > r > 0$ y $\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$ donde

$$\Gamma_1 = \{t : r \leq t \leq R\}, \qquad \Gamma_2 = \{R\,\mathrm{e}^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \alpha\},$$
$$\Gamma_3 = \{t\,\mathrm{e}^{i\alpha} : r \leq t \leq R\}, \qquad \Gamma_4 = \{r\,\mathrm{e}^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \alpha\}.$$

Del Teorema de Cauchy $\int_\Gamma \exp(-\lambda\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,z)T(z)x\,dz = 0$. Haciendo los cálculo tenemos que

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_4} \exp(-\lambda\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,z)T(z)\,dz = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2} \exp(-\lambda\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,z)T(z)\,dz = 0.$$

Entonces

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,t\,\mathrm{e}^{i\alpha})T(t\,\mathrm{e}^{i\alpha})\,\mathrm{e}^{i\alpha}\;dt = \int_0^\infty \exp(-\lambda\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,t)T(t)\,dt,$$
$$\mathrm{e}^{i\alpha}\int_0^\infty \exp(-\lambda t)T_\alpha(t)\,dt = \int_0^\infty \exp(-\lambda\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,t)T(t)\,dt,$$

de donde $\mathrm{e}^{i\alpha}\,R(\lambda, A_\alpha) = R(\lambda\,\mathrm{e}^{-i\alpha}, A)$ para $\lambda > \frac{w}{\cos\alpha}$, donde w es dado por Lema 1.5). Por tanto $A_\alpha = \mathrm{e}^{i\alpha}\,A$.

d) Sea $\theta' \in (0,\theta)$ y tomemos θ'' tal que $\theta' < \theta'' < \theta$, del item *b*) existe un $w \in \mathbb{R}$ tal que $\|\mathrm{e}^{-wz}\,T(z)\| \le M\;\forall\, z \in \Sigma_{\theta''}$. Sea $x \in X$ fijo, consideremos la sucesión $f_n : \Sigma_{\theta''} \to X$ dada por $f_n(z) = \mathrm{e}^{-w\frac{z}{n}}\,T(\frac{z}{n})x$. tenemos que $(0,\infty) \subset \{z \in \Sigma_{\theta''} : \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existe $\}$. Luego por el Teorema de Vitali ([2], Teorema A.5) existe una función holomorfa $f : \Sigma_{\theta''} \to X$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en todo subconjunto compacto de $\Sigma_{\theta''}$. Además, si $z \in (0,\infty)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = x$. Luego por el Teorema A.1 $f(z) = x\;\forall\, z \in \Sigma_{\theta''}$. Dado $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n(z) - x\| < \epsilon$ para todo $z \in \Sigma_{\theta'} \cap \{z : 1 \le |z| \le 2\}$ y $n \ge n_0$. Si $z \in \Sigma_{\theta'} \cap \{z : |z| < 1/n_0\}$ entonces $1/(n+1) < |z| < 1/n$ para algún $n \ge n_0$. Sigue que $1 < (n+1)|z| < 2$ y $\|f_{n+1}((n+1)z) - x\| = \|\mathrm{e}^{-wz}\,T(z)x - x\| < \epsilon$. Por tanto $\lim_{z\to 0,\, z\in\Sigma_{\theta'}} \mathrm{e}^{-wz}\,T(z)x = x$. ■

Definición 1.7. *Sea* $\theta \in (0, \pi/2]$. *Un semigrupo* T *es llamado un* semigrupo holomorfo limitado de ángulo θ *si* T *tiene una extensión holomorfa a* Σ_θ *que es limitada en* $\Sigma_{\theta'}$ *para cada* $\theta' \in (0,\theta)$.

Denotaremos a extensión de T a Σ_θ por T nuevamente. Cuando no queremos especificar el ángulo θ de la extensión en la definición, diremos simplemente que T es semigrupo holomorfo limitado.

Proposición 1.3. *Un operador* A *genera un semigrupo holomorfo, si y sólo si, existe un* $w \in \mathbb{R}$ *tal que* $A - w$ *genera un semigrupo holomorfo limitado.*

Demostración. Sea $T : \Sigma_\theta \to X$ semigrupo holomorfo generado por A. Si $\theta' \in (0,\theta)$, de la Proposición 1.2 *b*), existen $w \in R$ y $M > 0$ tales que $\|T(z)\| \le M\,\mathrm{e}^{w\,\mathrm{Re}\,z}\;\forall\, z \in \Sigma_{\theta'}$. Luego $T_w(z) = \mathrm{e}^{-wz}\,T(z)$ es un semigrupo holomorfo limitado de ángulo θ'. Si A_w el generador de T_w entonces $(0,\infty) \subset \rho(A)$ y

$$R(\lambda, A_w) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,T_w(t)\,dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+w)t}\,T(t)\,dt = R(\lambda + w, A), \quad \forall\,\lambda > 0.$$

Así $A_w = A - w$.

Recíprocamente, si $T_w : \Sigma_\theta \to X$ es el semigrupo holomorfo limitado generado por $A - w$ y $T : \Sigma_\theta \to X$ es dado por $T(z) = \mathrm{e}^{wz} T_w(z)$ entonces T es un semigrupo holomorfo. Sea $\widetilde{A}$ su generador, tomando $\lambda > 0$ suficientemente grande

$$R(\lambda, \widetilde{A}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{wt} T_w(t)\, dt = R(\lambda - w, A - w),$$

por tanto $\widetilde{A} = A$. ■

Ejemplo 1.3. *Sea $X = L^2(\Omega)$, definimos $T : \Sigma_{\pi/2} \to \mathcal{L}(X)$ como*

$$(T(z)f)(x) := \mathrm{e}^{zm(x)} f(x) \quad (x \in \Omega,\ \mathrm{Re}\, z > 0)$$

donde $m : \Omega \to (-\infty, w]$ ($w > 0$). Es fácil ver que T define un semigrupo holomorfo. Utilizando la Proposición 1.1 tenemos que el operador A dado por

$$D(A) = \{f \in X : m \cdot f \in X\}, \quad Af = m \cdot f,$$

es el generador de T.

Ejemplo 1.4. *Si $X = L^p(\mathbb{R})$ ($1 < p < \infty$) entonces*

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{4\pi t^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(x - y)\, \mathrm{e}^{-|y|^2/4t}\, dy \quad (t > 0, f \in X, x \in \Omega)$$

define un C_0-semigrupo holomorfo de angulo $\pi/2$ en X. Su generador es

$$\Delta f = f''$$
$$D(\Delta) = W^{2,p}(\mathbb{R})$$

Para más detalles de este ejemplo consulte [2]. Más ejemplos de semigrupos holomorfos podemos encontrar en [2], [12] y [7].

1.2.1 Caracterización de semigrupos holomorfos

Denotaremos

$$\Sigma_\alpha := \{r\, \mathrm{e}^{i\gamma} \in \mathbb{C} : r > 0, -\alpha < \gamma < \alpha\}$$

para algún $0 < \alpha \leq \pi$.

El siguiente teorema de representación analítica caracterizará el generador de un semigrupo holomorfo.

Teorema 1.13. *Sea* $0 < \alpha \leq \pi/2$, $w \in \mathbb{R}$ *y* $q : (w, \infty) \to X$. *Son equivalentes*

i) Existe una función holomorfa[1] $f : \Sigma_\alpha \to X$ *tal que* $\sup_{z \in \Sigma_\beta} \| e^{-wz} f(z) \| < \infty$ *para todo* $0 < \beta < \alpha$ *y*

$$q(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt, \quad \textit{para todo } \lambda > w.$$

ii) La función q *tiene una extensión holomorfa* $\widetilde{q} : w + \Sigma_{\alpha+\pi/2} \to X$ *tal que*

$$\sup_{\lambda \in w + \Sigma_{\gamma+\pi/2}} \| (\lambda - w) \widetilde{q}(\lambda) \| < \infty, \quad \textit{para todo } \; 0 < \gamma < \alpha.$$

Demostración. Supongamos que vale $i)$ y sea $0 < \beta < \alpha$. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|f(z)\| \leq M e^{w \operatorname{Re} z}$ para todo $z \in \overline{\Sigma}_\beta \setminus \{0\}$. Definimos el camino $\Gamma_\pm$ como $\Gamma_\pm = \{ s\, e^{\pm i\beta} : 0 < s < \infty \}$. Por el Teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt = \int_{\Gamma_+} e^{-\lambda z} f(z)\, dz \\ &= e^{i\beta} \int_0^\infty e^{-\lambda s\, e^{i\beta}} f(s\, e^{i\beta})\, ds \end{aligned} \tag{1.35}$$

para todo $\lambda > w$. Sea $0 < \epsilon < \pi/2 - \beta$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $-\pi/2 - \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 - \beta - \epsilon$. Entonces $-\pi/2 + \epsilon < \arg((\lambda - w)\, e^{i\beta}) < \pi/2 - \epsilon$. Así $\operatorname{Re}((\lambda - w)\, e^{i\beta}) \geq |\lambda - w| \operatorname{sen} \epsilon$. Sigue que

$$\| e^{-\lambda s\, e^{i\beta}} f(s\, e^{i\beta}) \| \leq M\, e^{-s|\lambda - w| \operatorname{sen} \epsilon}. \tag{1.36}$$

Luego la integral

$$q_+(\lambda) := e^{i\beta} \int_0^\infty e^{-\lambda s\, e^{i\beta}} f(s\, e^{i\beta})\, ds$$

es absolutamente convergente. Vamos a probar que q_+ define una función holomorfa en la región $-\pi/2 - \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 - \beta - \epsilon$. Si $q_n(\lambda) = e^{i\beta} \int_0^n e^{-\lambda s\, e^{i\beta}} f(s\, e^{i\beta})\, ds$ entonces q_n es holomorfa. De(1.36) tenemos

$$\begin{aligned} \|q_n(\lambda) - q_+(\lambda)\| &\leq \int_n^\infty \| e^{\lambda s\, e^{i\beta}} f(s\, e^{i\beta}) \|\, ds \leq \int_n^\infty M\, e^{-s|\lambda - w| \operatorname{sen} \epsilon}\, ds \\ &= M \frac{e^{-n|\lambda - w| \operatorname{sen} \epsilon}}{|\lambda - w| \operatorname{sen} \epsilon}. \end{aligned}$$

Luego, en cualquier compacto contenido en el dominio, $q_n \to q_+$ uniformemente cuando $n \to \infty$. Entonces q_+ es holomorfa ([16], Teorema 3.1.8). Además, de (1.36) sigue

[1] Vea Apéndice A.

que

$$\|(\lambda - w)q_+(\lambda)\| \leq \frac{M}{\operatorname{sen}\epsilon}$$

en $-\pi/2 - \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 - \beta - \epsilon$. Similarmente

$$q_-(\lambda) = \mathrm{e}^{-i\beta} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s\, \mathrm{e}^{-i\beta}} f(s\, \mathrm{e}^{-i\beta})\, ds$$

define una función holomorfa en la región $-\pi/2 + \beta + \epsilon < \arg(\lambda - w) < \pi/2 + \beta - \epsilon$, con

$$\|(\lambda - w)q_-(\lambda)\| \leq \frac{M}{\operatorname{sen}\epsilon}.$$

De (1.35), ambos q_+, q_- son extensiones holomorfas de q y juntos define una extensión holomorfa $\widetilde{q} : w + \Sigma_{\beta-\epsilon+\pi/2} \to X$ satisfaciendo $\|(\lambda - w)\widetilde{q}(\lambda)\| \leq \frac{M}{\operatorname{sen}\epsilon}$ en ese sector. Como $\beta < \alpha$ y $0 < \epsilon < \pi/2 - \beta$ son arbitrários y del Teorema de A.1 concluimos $ii)$.

Ahora supongamos que vale $ii)$. Si $0 < \gamma < \alpha$ y $\delta > 0$, entonces existe un $M > 0$ tal que $\|(\lambda - w)\widetilde{q}(\lambda)\| \leq M$ para todo $\lambda \in (w + \overline{\Sigma}_{\gamma+\pi/2}) \setminus \{w\}$. Consideremos la curva orientada positivamente Γ (dependiendo de γ y δ) dada por

$$\Gamma_\pm = \{w + r\, \mathrm{e}^{\pm i(\gamma+\pi/2)} : \delta \leq r\}, \quad \Gamma_0 = \{w + \delta\, \mathrm{e}^{i\theta} : -\gamma - \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + \pi/2\}. \tag{1.37}$$

Sea $z \in \Sigma_\gamma$ y $0 < \epsilon < \gamma$ tal que $z \in \Sigma_{\gamma-\epsilon}$. Para $\lambda = w + r\, \mathrm{e}^{\pm i(\gamma+\pi/2)} \in \Gamma_\pm$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda z) &= w \operatorname{Re} z + r|z| \cos(\arg z \pm (\gamma + \pi/2)) \\ &\leq w \operatorname{Re} z - r|z| \operatorname{sen}\epsilon. \end{aligned}$$

Luego

$$\|\mathrm{e}^{\lambda z}\, \widetilde{q}(\lambda)\| \leq \mathrm{e}^{w \operatorname{Re} z}\, \mathrm{e}^{-r|z| \operatorname{sen}\epsilon}\, \frac{M}{r}, \quad \forall\, \lambda \in \Gamma_\pm. \tag{1.38}$$

Esto muestra que

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{e}^{\lambda z}\, \widetilde{q}(\lambda)\, d\lambda, \quad z \in \Sigma_\gamma, \tag{1.39}$$

es absolutamente convergente. Análogamente a lo que fue probado en $i)$ tenemos que f es holomorfa en Σ_γ y además

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^n\, \mathrm{e}^{\lambda z}\, \widetilde{q}(\lambda)\, d\lambda, \quad z \in \Sigma_\gamma. \tag{1.40}$$

Por el Teorema de Cauchy esta función es independiente de $\delta > 0$. Luego, del Teorema A.1 , f define una función holomorfa en Σ_α.

Para estimar $f(z)$, sea $\delta = |z|^{-1}$ y escojamos γ y ϵ tal que $\gamma < \alpha$ y $|\arg z| < \gamma - \epsilon$. En Γ_0, $\lambda = w + |z|^{-1}\,\mathrm{e}^{i\theta}$ y $-\gamma - \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + \pi/2$. Así

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \mathrm{e}^{\lambda z}\, \widetilde{q}(\lambda) d\lambda \right\| &\leq \frac{M\,\mathrm{e}^{w\,\mathrm{Re}\,z}}{2\pi} \int_{-\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \mathrm{e}^{\cos(\arg z + \theta)}\, d\theta \\ &\leq M\,\mathrm{e}^{1 + w\,\mathrm{Re}\,z}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

De la estimativa (1.38)

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\pm} \mathrm{e}^{\lambda z}\, \widetilde{q}(\lambda) d\lambda \right\| &\leq \frac{M\,\mathrm{e}^{w\,\mathrm{Re}\,z}}{2\pi} \int_{|z|^{-1}}^{\infty} \mathrm{e}^{-r|z|\,\mathrm{sen}\,\epsilon}\, \frac{dr}{r} \\ &= \frac{M\,\mathrm{e}^{w\,\mathrm{Re}\,z}}{2\pi} \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-r\,\mathrm{sen}\,\epsilon}}{r} dr \\ &\leq \frac{M\,\mathrm{e}^{w\,\mathrm{Re}\,z}}{2\pi\,\mathrm{sen}\,\epsilon}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Luego (1.41) y (1.42) establece que

$$\sup_{z \in \Sigma_{\gamma-\epsilon}} \|\mathrm{e}^{wz} f(z)\| < \infty$$

para cualquier $0 < \epsilon < \gamma < \alpha$.

Ahora probaremos que $\widehat{f}(\lambda) = q(\lambda)$ cuando $\lambda > w$. Dado $\lambda > w$, sea $0 < \delta < \lambda - w$ y $0 < \gamma < \alpha$. Entonces λ está a la derecha de la curva Γ, el Teorema de Fubini y Teorema de Residuo implican que

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{e}^{\mu t}\, \widetilde{q}(\mu) d\mu dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mu-\lambda)t}\, \widetilde{q}(\mu) dt d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\widetilde{q}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \\ &= \widetilde{q}(\lambda) + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\widetilde{q}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \end{aligned}$$

donde $\Gamma_R = \{w + R\,\mathrm{e}^{i\theta} : -\gamma - \pi/2 \leq \theta \leq \gamma + \pi/2\}$. El resultado ahora sigue del hecho que

$$\left\| \int_{\Gamma_R} \frac{\widetilde{q}(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \right\| \leq \int_{-\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \frac{M}{|w + R\,\mathrm{e}^{i\theta} - \lambda|} \to 0, \quad \text{cuando } R \to \infty. \qquad \blacksquare$$

Definición 1.8. *Dados $w \in \mathbb{R}$ y $\theta \in (0, \pi/2]$ decimos que $A : D(A) \subset X \to X$ es* sectorial de tipo (w, θ) *si*

$$w + \Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A)$$

y, para cada $\epsilon > 0$ existe una $M_\epsilon > 0$ tal que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\epsilon}{|\lambda - w|}, \quad \forall \lambda \in w + \Sigma_{\theta+\pi/2-\epsilon}.$$

Si no queremos especificar el tipo (w, θ) en la definición, decimos simplemente que A es sectorial.

Teorema 1.14. *Sea A un operador en X. Son equivalentes:*

i) A genera un semigrupo holomorfo limitado.

ii) A es sectorial (con $w = 0$).

iii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \rho(A)$ y

$$M = \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \|\lambda R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Demostración. $i) \to ii)$. Sea $T : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ el semigrupo holomorfo limitado generado por A. Como $R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\, dt$ para $\lambda > 0$, del Teorema 1.13, existe una extensión holomorfa $\widetilde{R} : \Sigma_{\theta+\pi/2} \to \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_{\gamma+\pi/2}} \|\lambda \widetilde{R}(\lambda)\| < \infty, \qquad \text{para todo } \ 0 < \gamma < \theta.$$

Del Teorema B.4, $\Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A)$ y $R(\lambda, A) = \widetilde{R}(\lambda)$ para $\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$. Por tanto A es sectorial.

$ii) \to i)$. Sea A sectorial de tipo $(0, \theta)$, del Teorema 1.13 existe una función holomorfa $T : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ que es limitado en Σ_α para todo $0 < \alpha < \theta$ y

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\, dt, \quad \lambda > 0.$$

Mostraremos que T es un semigrupo. Como en la prueba da Proposición 1.1, tenemos

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s+t)\, ds\, dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(t)T(s)\, ds\, dt,$$

así $T(s+t) = T(t)T(s)$ para todo $s, t > 0$ ([16], Teorema 8.1.2). Si $T(t)x = 0$ para todo $t > 0$ sigue que $R(\lambda, A)x = 0$ y por tanto $x = 0$.

$iii) \to ii)$. Sea $c = \frac{1}{2M}$, para $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $-c|s| < r \leq 0$ sea $\lambda = c|s| + r + is$. Entonces $|\lambda - (r + is)| = c|s| \leq \frac{1}{2}\|R(\lambda, A)\|^{-1}$. Del Teorema B.2, $r + is \in \rho(A)$ y

$$\|(r + is)R(r + is, A)\| \leq \frac{|r + is|\|R(\lambda, A)\|}{1 - c|s|\|R(\lambda, A)\|} \leq \frac{2M|r + is|}{|s|}.$$

Ahora tomando $\theta = \arctan c$ $(0 < \theta < \pi/2)$, tenemos que para $r + is \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$

$$\|(r + is)R(r + is, A)\| \leq \frac{2M|r + is|}{|s|} = \frac{2M}{\cos\beta},$$

donde $\beta = \arctan(-r/s)$. Como $\beta < \theta$ sigue $\cos\beta > \cos\theta$ y

$$\|(r + is)R(r + is, A)\| \leq \frac{2M}{\cos\theta}, \quad r + is \in \Sigma_{\theta+\pi/2},\ r < 0.$$

Esto completa la prueba. ■

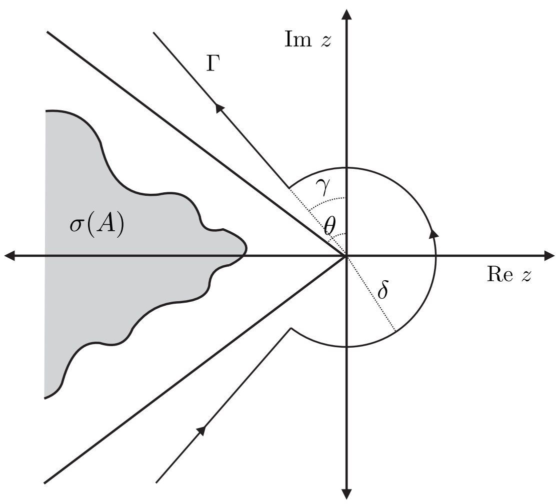
Observación 1.1. *Note que el semigrupo T generado por A es dado por*

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \mathrm{e}^{\lambda z}\, R(\lambda, A)\, dz, \quad z \in \Sigma_{\gamma}$$

donde $0 < \gamma < \theta$ y el camino Γ es dado por la unión de

$$\Gamma_{\pm} = \{r\, \mathrm{e}^{i\delta} : \delta \leq r\} \quad y \quad \Gamma_0 = \{\delta\, \mathrm{e}^{i\varphi} : |\varphi| < \gamma + \pi/2\}$$

donde $\delta > 0$.



Corolario 1.7. *Sea A un operador lineal en X. Son equivalentes:*

i) *A genera un semigrupo holomorfo en X.*

ii) *A es sectorial.*

iii) *Existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > w\} \subset \rho(A)$ y*

$$\sup_{\mathrm{Re}\ \lambda > w} \|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| < \infty.$$

(iv) *Existe un $r > 0$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda > 0,\ |\lambda| > r\} \subset \rho(A)$ y*

$$\sup_{\mathrm{Re}\ \lambda > 0,\ |\lambda| > r} \|\lambda R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Demostración. La equivalencia entre los ítems $i)$, $ii)$ y $iii)$ sigue de la Proposición 1.3 y del teorema anterior. Vamos probar que $iii)$ equivalente a $iv)$. Como $iii)$ implica $ii)$ podemos tomar $\gamma \in (0, \pi/2)$ tal que $M = \sup_{\lambda \in w + \Sigma_{\gamma + \pi/2}} \|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| < \infty$. Si $w \leq 0$, entonces $|\lambda| \leq |\lambda - w|$ para $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ y $iv)$ sigue fácilmente. Si $w > 0$, tomando $r > \text{máx}\{2w + 1, w \tan \gamma\}$ es fácil ver que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\ |\lambda| > r\} \subset \rho(A)$. Para $|\lambda| > r$ tenemos que $|\lambda - w| > |w| + 1$. Por tanto, si $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ y $|\lambda| > r$,

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq |\lambda - w| \|R(\lambda, A)\| + |w| \frac{M}{|w| + 1} < 2M.$$

Recíprocamente, si $M = \sup_{\mathrm{Re}\ \lambda > 0,\ |\lambda| > r} \|\lambda R(\lambda, A)\|$, tomando $w = r$ tenemos que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > w\} \subset \rho(A)$. Para $\mathrm{Re}\,\lambda > w$ es claro que $|\lambda| > w$, y por tanto

$$\|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| \leq 2|\lambda| \|R(\lambda, A)\| < 2M,$$

Esto completa la prueba del corolario. ■

1.2.2 Propiedades de los semigrupos holomorfos

Sea $A : D(A) \subset X \to X$ generador de un semigrupo holomorfo T, en la siguiente proposición enunciaremos las principales propiedades de T.

Proposición 1.4. *i)* *$T(t)x \in D(A^n)$ para cada $t > 0$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in D(A^n)$, entonces*

$$A^n T(t)x = T(t)A^n x, \quad t > 0.$$

ii) La función $t \mapsto T(t)$ pertenece a $C^\infty((0,\infty),\mathcal{L}(X))$ y

$$\frac{d^n}{dt^n}T(t) = A^n T(t), \quad t > 0.$$

iii) Si $x \in \overline{D(A)}$, entonces $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$. Recíprocamente, si existe $y = \lim_{t\to 0^+} T(t)x$, entonces $x \in \overline{D(A)}$ e $y = x$.

iv) Para $x \in X$ y $t > 0$, la integral $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ y

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x.$$

v) Si $x \in D(A)$ y $Ax \in \overline{D(A)}$, entonces $\lim_{t\to 0^+}(T(t)x - x)/t = Ax$. Recíprocamente, si existe $z = \lim_{t\to 0^+}(T(t)x - x)/t$, entonces $x \in D(A)$ y $z = Ax \in \overline{D(A)}$.

Demostración. Primeramente probaremos la siguiente afirmación
Afirmación: Para $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Gamma \lambda^n \, \mathrm{e}^{\lambda t}\, d\lambda = 0 \tag{1.43}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda = 1 \tag{1.44}$$

donde Γ es como (1.37). En efecto, del Teorema de Cauchy

$$\int_\Gamma \lambda^n \, \mathrm{e}^{\lambda t}\, d\lambda = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \lambda^n \, \mathrm{e}^{\lambda t}\, d\lambda, \quad 2\pi i = \int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda - \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda$$

donde $\Gamma_R = \{w + R\,\mathrm{e}^{i\theta} : \gamma + \pi/2 \le \theta \le -\gamma + 3\pi/2\}$. Por tanto (1.43) y (1.44) siguen de las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\Gamma_R} \lambda^n \, \mathrm{e}^{\lambda t}\, d\lambda\right\| &\le \int_{\gamma+\pi/2}^{-\gamma+3\pi/2} |w + R\,\mathrm{e}^{i\theta}|^n \, \mathrm{e}^{wt}\, \mathrm{e}^{tR\cos\theta}\, R\, d\theta \quad (|w| < R)\\ &\le \int_{\gamma+\pi/2}^{-\gamma+3\pi/2} 2^n R^{n+1}\, \mathrm{e}^{wt}\, \mathrm{e}^{tR\cos\theta}\, R\, d\theta \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

$$\left\|\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda\right\| \le \mathrm{e}^{wt}\int_{\gamma+\pi/2}^{-\gamma+3\pi/2}\frac{\mathrm{e}^{tR\cos\theta}\, R}{R - |w|}\, d\theta \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ahora probaremos la proposición.

$i)$ y $ii)$. Como $T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)\, d\lambda$ y $T'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda\, e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)\, d\lambda$, usando $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$ y (1.43) sigue

$$\begin{aligned}\int_\Gamma A(e^{\lambda t}\, R(\lambda, A))\, d\lambda &= \int_\Gamma \lambda\, e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)\, d\lambda - \int_\Gamma e^{\lambda t}\ d\lambda = \int_\Gamma \lambda\, e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)\, d\lambda \\ &= T'(t).\end{aligned} \tag{1.45}$$

Luego, de Proposición 1.1.7 [2], $T(t)x \in D(A)$ y $A\int_\Gamma e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)\, d\lambda = \int_\Gamma A(e^{\lambda t}\, R(\lambda, A))\, d\lambda$ o equivalentemente

$$AT(t) = T'(t). \tag{1.46}$$

Si $x \in D(A)$, $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$ y por tanto $AT(t)x = T(t)Ax$. Así $i)$ y $ii)$ es válido para $n = 1$. Ahora usaremos inducción sobre n. Supongamos que el resultado sea válido para n, esto es, $T(t)x \in D(A^n)$ y $A^nT(t)x = T^{(n)}(t)x$. Entonces

$$\int_\Gamma A(\lambda^n\, e^{\lambda t}\, R(\lambda, A))\, d\lambda = \int_\Gamma \lambda^{n+1}\, e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)\, d\lambda - \int_\Gamma \lambda^n\, e^{\lambda t}\ d\lambda = T^{(n+1)}(t).$$

Nuevamente de la Proposición 1.1.7 [2], $T^n(t)x \in D(A)$ y

$$A\int_\Gamma \lambda^n\, e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)x\, d\lambda = \int_\Gamma A(\lambda^n\, e^{\lambda t}\, R(\lambda, A))x\, d\lambda = T^{(n+1)}(t)x \tag{1.47}$$

o equivalentemente $T(t)x \in D(A^{n+1})$ y $AT^{(n)}(t)x = T^{(n+1)}(t)x$. De la hipótesis de inducción sigue que

$$A^{n+1}T(t)x = AA^nT(t)x = T^{(n+1)}(t)x.$$

Si $x \in D(A^{n+1})$, $T(t)A^{n+1}x = T(t)AA^nx = AT(t)A^nx = AA^nT(t)x = A^{n+1}T(t)$.

$iii)$ Sea $x \in D(A)$, usando $R(\lambda, A)Ax = \lambda R(\lambda, A)x - x$ y (1.44)

$$T(t)x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\left(R(\lambda, A) - \frac{1}{\lambda}\right)x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\, d\lambda. \tag{1.48}$$

Se verifica:

- $\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax$ es dominada por una función integrable en Γ. En efecto, en $\Gamma_\pm$,

$$\left\|\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\right\| \le \frac{M}{|\lambda||\lambda - w|}\, e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}\|Ax\| \le \frac{M_1}{|\lambda||\lambda - w|}\|Ax\|$$

  donde M es la constante de la definición de sectorial y $M_1 = \sup_{\Gamma_\pm}\{e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}, M\}$. Note $\frac{1}{|\lambda||\lambda-w|}$ es integrable en $\Gamma_\pm$.

- $\int_\Gamma \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\, d\lambda = 0$. En efecto, por Teorema de Cauchy

$$0 = \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\, d\lambda + \int_{-\Gamma_R} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\, d\lambda.$$

Estimando

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\Gamma_R} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\, d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma+\pi/2}^{-\gamma+3\pi/2} \frac{M}{|\lambda - w||\lambda|} \|Ax\| R\, d\theta = \int_{\gamma+\pi/2}^{-\gamma+3\pi/2} \frac{M}{|\lambda|} \|Ax\|\, d\theta \\ &\leq \int_{-\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \frac{M}{|R| - |w|} \|Ax\|\, d\theta \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Del Teorema da Convergencia Dominada

$$\lim_{t\to 0} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\, d\lambda = \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax\, d\lambda = 0.$$

Por tanto, de (1.48), $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ para $x \in D(A)$. Por densidad, esto sigue válido para todo $x \in \overline{D(A)}$. Recíprocamente, si $y = \lim_{t\to 0^+} T(t)x$ entonces $y \in \overline{D(A)}$. Sea $\xi > w$,

$$R(\xi, A)y = \lim_{t\to 0^+} R(\xi, A)T(t)x = \lim_{t\to 0^+} T(t)R(\xi, A)x = R(\xi, A)x \quad (R(\xi, A)x \in D(A)),$$

Así $y = x$.

$iv)$ Sea $\xi \in \rho(A)$, $x \in X$. Para $s \in (0, t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^t T(s)x\, ds &= \int_\epsilon^t (\xi - A)R(\xi, A)T(s)x\, ds \\ &= \xi \int_\epsilon^t R(\xi, A)T(s)x\, ds - \int_\epsilon^t \frac{d}{ds}(R(\xi, A)T(s)x)\, ds \\ &= \xi \int_\epsilon^t R(\xi, A)T(s)x\, ds - R(\xi, A)T(t)x + R(\xi, A)T(\epsilon)x \end{aligned}$$

como $R(\xi, A)x \in D(A)$, del ítem $ii)$ cuando $\epsilon \to 0^+$ tenemos

$$\int_0^t T(s)x\, ds = \xi R(\xi, A) \int_0^t T(t)x\, ds - R(\xi, A)(T(t)x - x).$$

Luego $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ y $(\xi - A)\int_0^t T(s)x\,ds = \xi\int_0^t T(s)x\,ds - (T(t)x - x)$, de donde

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x.$$

$v)$. Si $x \in D(A)$ y $Ax \in \overline{D(A)}$, entonces

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}A\int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t AT(s)x\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\,ds.$$

Como $s \mapsto T(s)Ax$ es continua en $[0,t]$ (ítem $iii)$), sigue $\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t} = Ax$. Si $z = \lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}$, entonces $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ y, del ítem (iii) $x, z \in \overline{D(A)}$. Además, para $\xi \in \rho(A)$

$$R(\xi, A)z = \lim_{t\to 0^+} R(\xi, A)\left(\frac{T(t)x - x}{t}\right)$$

y del ítem (iv)

$$R(\xi, A)z = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}R(\xi, A)A\int_0^t T(s)x\,ds = \lim_{t\to 0^+}(\xi R(\xi, A) - I)\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds.$$

Como $x \in \overline{D(A)}$ entonces $s \mapsto T(s)x$ es continua en 0 y así

$$R(\xi, A)z = (\xi R(\xi, A) - I)x,$$

por tanto $x \in D(A)$ y $z = (\xi - (\xi - A))x = Ax$. ■

Definición 1.9. *Sea X_0 un subespacio de X, la* parte de A en X_0 *es definido como*

$$\begin{cases} D(A_0) = \{x \in D(A) \cap X_0 : Ax \in X_0\}, \\ A_0 : D(A_0) \to X_0,\ A_0x = Ax. \end{cases}$$

Teorema 1.15. *Sea A el generador de un semigrupo holomorfo, $X_0 = \overline{D(A)}$ y A_0 la parte de A en X_0. Entonces A_0 genera un C_0-semigrupo holomorfo T_0 en X_0 y $T_0 = T_{|X_0}$.*

Demostración. Como A genera un semigrupo holomorfo T entonces A es sectorial. Además $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ y $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)_{|X_0}$, entonces A_0 genera un semigrupo holomorfo T_0. Por construcción tenemos

$$T_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda, A_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda, A)_{|X_0} = T(t)_{|X_0}.$$

De la Proposición 1.4 $iii)$, T_0 es un C_0-semigrupo. ■

Corolario 1.8. *Asumamos que A genera un C_0-semigrupo holomorfo en X y $x \in X$. Entonces existe una única función $u \in C^\infty((0,\infty),X) \cap C([0,\infty),X) \cap C((0,\infty),D(A))$ satisfaciendo*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{1.49}$$

Demostración. Como consecuencia del Teorema 1.15 y de la Proposición 1.4, $T(t)x$ es solución de (1.49).

Sea v tal que $v'(t) = Av(t)$ y $v(0) = 0$. Vamos mostrar que $v \equiv 0$. Sea $S(t)y := \int_0^t T(s)y\,ds$, entonces $S(t)y \in D(A)$ y $AS(t)y = T(t)y - y$ para todo $y \in X$, por Proposición 1.4. Sea $t > 0$, $w(s) := S(t-s)v(s)$, $0 \le s \le t$. Entonces

$$\begin{aligned} w'(s) &= -T(t-s)v(s) + S(t-s)v'(s) \\ &= -T(t-s)v(s) + S(t-s)Av(s) \\ &= -T(t-s)v(s) + AS(t-s)v(s) \\ &= -v(s). \end{aligned}$$

Como $w(t) = w(0) = 0$, concluimos que

$$0 = w(t) = \int_0^t w'(s)\,ds = -\int_0^t v(s)\,ds.$$

Como t es arbitrario, sigue que $v(t) = 0$ para todo $t \ge 0$. ■

1.2.3 Teorema de perturbación

Teorema 1.16 (Perturbación)**.** *Sea A el generador de un semigrupo holomorfo en X. Sea $B : D(A) \to X$ un operador lineal tal que, $\forall\, \epsilon > 0$ existe $b \ge 0$ tales que*

$$\|Bx\| \le \epsilon\|Ax\| + b\|x\|, \quad x \in D(A).$$

Entonces $A + B$ genera un semigrupo holomorfo.

Demostración. Asumiremos primero que A genera un semigrupo holomorfo limitado en X. Del Teorema 1.14, existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que

$$\Sigma_{\theta+\pi/2} \subset \rho(A) \quad \text{y} \quad \sup_{\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}} \|\lambda R(\lambda, A)\| = M < \infty.$$

Sigue, de la hipótesis, que dado un $\epsilon > 0$ existe $b \geq 0$ tal que para $x \in X$

$$\begin{aligned}\|BR(\lambda, A)x\| &\leq \epsilon\|AR(\lambda, A)x\| + b\|R(\lambda, A)x\| \\ &= \epsilon\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| + b\|R(\lambda, A)x\| \\ &\leq \epsilon(M+1)\|x\| + \frac{bM}{|\lambda|}\|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}.\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2(M+1)}$ y $|\lambda| > 4bM$ tenemos que $\|BR(\lambda, A)\| < 3/4$. Sigue que $I - BR(\lambda, A)$ es invertible con $\|(I - BR(\lambda, A))^{-1}\| < 4$ siempre que $|\lambda| > 4bM$, $\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$. Como

$$\lambda - (A + B) = (I - BR(\lambda, A))(\lambda - A), \quad \lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}.$$

Entonces $\lambda - (A + B)$ es invertible para $\lambda \in \Sigma_{\theta+\pi/2}$, $|\lambda| > 4bM$ y

$$\|R(\lambda, A + B)\| \leq \frac{4M}{|\lambda|}.$$

Por el Corolario 1.7 $A + B$ genera un semigrupo holomorfo. Si A genera un semigrupo holomorfo, escogemos $w \in \mathbb{R}$ tal que $A - w$ genera un semigrupo holomorfo limitado en X. De la primera parte de la prueba $A + B - w$ genera un semigrupo holomorfo y por tanto $A + B$ genera un semigrupo holomorfo en X. ■

1.3 Operadores de resolvente positivo

En esta sección asumiremos que X es un espacio de Banach ordenado con cono normal X_+ (Vea apéndice D).

Definición 1.10. *Decimos que un operador en X tiene* resolvente positivo *cuando existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $(w, \infty) \subset \rho(A)$ y $R(\lambda, A) \geq 0$ para $\lambda > w$.*

Sea A un operador de resolvente positivo, entonces para $\lambda > w$

$$(-1)^n R(\lambda, A)^{(n)} = n! R(\lambda, A)^{n+1} \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así la función $R(\lambda, A)$ es completamente monotónica.[2]

Proposición 1.5. *Sea A un operador de resolvente positivo y $s(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ ($s(A)$ es llamado la cota espectral de A) entonces*

i) $s(A) < \infty$ y para $\mu > \lambda > s(A)$ tenemos $\lambda, \mu \in \rho(A)$ y $R(\lambda, A) \geq R(\mu, A) \geq 0$.

[2] Vea [13], pag 144.

ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > s(A)\} \subset \rho(A)$ *y*

$$s(A) = \text{ínf}\{w : (w,\infty) \subset \rho(A) \text{ y } R(\lambda, A) \geq 0 \text{ para todo } \lambda > w\}.$$

iii) Si $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ *con* $R(\lambda, A) \geq 0$ *entonces* $\lambda > s(A)$.

Demostración. Sea

$$s = \text{ínf}\{w : (w,\infty) \subset \rho(A) \text{ y } R(\lambda, A) \geq 0 \text{ para todo } \lambda > w\}.$$

Por hipótesis $s < \infty$. Sea $s < \lambda < \mu$, entonces

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \geq 0$$

Así $R(\lambda, A) \geq R(\mu, A)$.

Afirmamos que $H_s \subset \rho(A)$ donde $H_s = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > s\}$. En efecto, sea Ω_0 la componente conexa de $H_s \cap \rho(A)$ conteniendo (s,∞). Si $H_s \not\subset \rho(A)$ entonces existe $\mu_n \in \Omega_0$ tal que $\mu = \text{lím}_{n\to\infty} \mu_n \in H_s \setminus \rho(A)$. Entonces del Teorema B.2 tenemos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\mu_n, A)\| = \infty.$$

Del Principio de Acotación Uniforme ([10], Teorema 2.2), existe $x \in X$ y $x^* \in X^*$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\langle x^*, R(\mu_n, A)x\rangle\| = \infty$. Como $X = \text{span}X_+$ y $X^* = \text{span}X_+^*$ (Teorema E.1) podemos asumir que $x \in X_+$, $x^* \in X_+^*$. Además

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\langle x^*, R(\lambda, A)x\rangle = \langle x^*, \frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A)x\rangle = \langle x^*, (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}x\rangle$$

entonces $(-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\langle x^*, R(\lambda, A)x\rangle = \langle x^*, n!R(\lambda, A)^{n+1}x\rangle \geq 0$ para todo $\lambda > s$. Del Teorema de Bernstein ([13], §4 Teorema 12a) , existe una función creciente y limitada $\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x^*, R(\lambda + s_0, A)x\rangle = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, d\alpha(t) = \widehat{d\alpha}(\lambda)$$

para $\lambda > 0$, donde $\operatorname{Re}\mu > s_0 > s$. Sigue por extensión holomorfa que

$$\langle x^*, R(\mu_n, A)x\rangle = \widehat{d\alpha}(\mu_n - s_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}|\langle x^*, R(\mu_n, A)x\rangle| &\leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re}\mu_n - s_0)t}\, d\alpha(t) = \widehat{d\alpha}(\operatorname{Re}\mu_n - s_0) = \langle x^*, R(\operatorname{Re}\mu_n - s_0, A)x\rangle \\ &\leq \langle x^*, R(\operatorname{Re}\lambda_0, A)x\rangle\end{aligned}$$

donde $\lambda_0 = \operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Re}\mu_n - s_0 > 0$ ($\operatorname{Re}\mu = \operatorname{lím}_{n\to\infty} \operatorname{Re}\mu_n > s_0$). Esto es una contradicción con $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\langle x^*, R(\mu_n, A)x\rangle\| = \infty$.

Ahora probemos que $s = s(A)$. Si $s = -\infty$, $\rho(A) = \mathbb{C}$ y por tanto $s(A) = s$. Supongamos que $s > -\infty$. Afirmamos que $s \in \sigma(A)$. En efecto, si $s \in \rho(A)$, $R(s, A) \geq 0$. Más aún, para $\mu < s$ suficientemente cerca de s se tiene del Teorema B.2 que

$$R(\mu, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (s-\mu)^n R(s, A)^{n+1} \geq 0.$$

Entonces $(\mu, \infty) \subset \rho(A)$ y $R(\lambda, A) \geq 0$ para todo $\lambda \geq \mu$, lo que contradice la definición de s. Esto prueba que $s \in \sigma(A)$. Así $s \leq s(A)$, además $s(A) \leq s$, por tanto $s = \sigma(A)$.

$ii)$ Supongamos que existe $\lambda \in \rho(A)$ tal que $\lambda < s(A)$ y $R(\lambda, A) \geq 0$. Sea $\mu_n \to s(A)$, como $s(A) \in \sigma(A)$, entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\mu_n, A)\| = \infty. \tag{1.50}$$

Luego, de (E.5) $\|R(\mu_n, A)\| \leq C\|R(\lambda, A)\|$ lo que es una contradicción con (1.50). ■

Capítulo

2

Semigrupo en $C_0(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitado, $n \geq 2$, con frontera $\partial\Omega$. Consideraremos el operador $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{A}u := \sum_{i,j=1}^{n} -a_{ij}D_{ij}u + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j u + cu \tag{2.1}$$

con coeficientes de valor real a_{ij}, b_j, c satisfaciendo

$$\begin{gathered} a_{ij} \in C(\overline{\Omega}), b_j \in L^\infty(\Omega),\ j = 1, \ldots, n,\ c \in L^\infty(\Omega),\ c \geq 0, \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0|\xi|^2 \quad (x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^m). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Si A_0 es la parte de $\mathcal{A}$ en $C_0(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} = 0\}$, esto es,

$$\begin{aligned} D(A_0) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) : \mathcal{A}u \in C_0(\Omega)\} \\ A_0 u &= \mathcal{A}u \end{aligned}$$

entonces mostraremos que si Ω satisface condición del cono exterior uniforme, $-A_0$ genera un C_0-semigrupo holomorfo limitado en $C_0(\Omega)$ (Teorema 2.15).

2.1 Ecuaciones elípticas de segundo orden

En esta sección demostraremos algunos teoremas sobre ecuaciones elípticas de segundo orden. Denotaremos por Ω a un dominio en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).

Definición 2.1. *Sea $v \in R^n$ no nulo, y para cada $x \neq 0$ sea $\measuredangle(x, v)$ el ángulo entre los vectores*

x y v. Para v, $\rho > 0$ y κ satisfaciendo $0 < \kappa \leq \pi$, el conjunto

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \text{ o } 0 < |x| \leq \rho,\ \measuredangle(x, v) \leq \kappa/2\}$$

es llamado cono circular recto *de altura ρ, dirección v y abertura de ángulo κ con vértice en el origen. Note que $V_x = x + V$ es un cono circular recto con vértice en x con las mismas dimensiones y dirección de V.*

Definición 2.2. *a) Diremos que Ω satisface la* condición de cono exterior en $x_0 \in \partial\Omega$, *si existe un cono V_{x_0} con vértice en x_0 satisfaciendo $\overline{V}_{x_0} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$.*

b) Si Ω satisface la condición de cono exterior en cada punto $\partial\Omega$ diremos que Ω satisface la condición de cono exterior .

c) Diremos que Ω satisface la condición del cono exterior uniforme *si satisface la condición del cono exterior en cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ y todos los conos V_{x_0} son congruentes a un cono fijo V.*

Definición 2.3. *a) Diremos que $z \in \partial\Omega$ es* punto regular *si existe una función* barrera*, esto es,*

$$v \in C(\overline{\Omega'}), \quad \Delta v \leq 0 \ \text{ en } \mathcal{D}(\Omega'), \quad v(z) = 0 \quad y \quad v(x) > 0 \ \ \forall\, x \in \Omega'.$$

donde $\Omega' = \Omega \cap B$ y B es una bola de centro z.

b) Diremos que Ω es Wiener regular *(o* Dirichlet regular*) si todo sus puntos de frontera son regulares.*

Observación 2.1. *Si Ω es limitado, Wiener regular (o Dirichlet regular) es equivalente a lo siguiente: para cada $g \in C(\partial\Omega)$ existe una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

([6], Teorema 2.15).

Lema 2.1. *Si Ω satisface la condición del cono exterior entonces Ω es Wiener regular.*

Demostración. Consideremos el caso $n > 2$. Sea $z \in \partial\Omega$ entonces existen $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{z\}$, $0 < \theta_0 < \pi$, $r_0 > 0$ tal que

$$\Omega \cap B(z, r_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \measuredangle(z - x_0, x - z) < \theta_0\}$$

Nosotros buscamos una función barrera de la forma

$$v(x) = r^{\lambda} f(\theta),$$

donde $r = |x - z|$ y $\theta = \measuredangle(z - x_0, x - z) \in [0, \theta_0)$ con $\lambda > 0$ y f continua y estrictamente positiva en $[0, \theta_0]$, que serán determinadas.

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $z = 0$. Sea $D = \mathbb{R}x_0$, calculando Δv en $\mathcal{D}(\Omega' \setminus D)$ tenemos

$$\Delta v = r^{\lambda-2}\left(\lambda(\lambda+n-2)f(\theta) + f''(\theta) + (n-2)\cot\theta f'(\theta)\right)$$

equivalentemente

$$\Delta v = r^{\lambda-2}\left(\lambda(\lambda+n-2)f(\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}^{n-2}\theta}\frac{d}{d\,\theta}\left(\operatorname{sen}^{n-2}\theta\frac{d\,f}{d\,\theta}(\theta)\right)\right).$$

Fijando $\theta_0 < \theta_0' < \pi$ y escogiendo

$$f(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_0'}\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^{n-2} dt$$

resulta

$$f \in C^1([0,\theta_0]) \cap C^2((0,\theta_0]), \quad f \geq f(\theta_0) > 0 \ \text{ en } [0,\theta_0]$$

y

$$\Delta v = -r^{\lambda-2}\left(\frac{(n-2)\theta^{n-3}}{\operatorname{sen}^{n-2}\theta} - \lambda(\lambda+n-2)f(\theta)\right) \quad \text{ en } \Omega' \setminus D.$$

Como $f(\theta) \leq f(0)$ y $\frac{(n-2)\theta^{n-3}}{\operatorname{sen}^{n-2}\theta} \geq \frac{n-2}{\theta} \geq \frac{n-2}{\theta_0}$, entonces

$$\Delta v \leq -r^{\lambda-2}\left(\frac{n-2}{\theta_0} - \lambda(\lambda+n-2)f(0)\right) \quad \text{ en } \Omega' \setminus D.$$

Escogiendo

$$\lambda = \frac{n-2}{2}\left(\left(1 + \frac{4}{(n-2)\theta_0 f(0)}\right)^{1/2} - 1\right)$$

tenemos $\Delta v \leq 0$ en $\Omega' \setminus D$. Para completar la prueba debemos mostrar que $\Delta v \leq 0$ en $\mathcal{D}(\Omega')$. Sea $h(x) = \operatorname{dist}(x, D) \in C^{\infty}(\Omega' \setminus D)$ y $g_\epsilon \in C^{\infty}$ dado por $g_\epsilon(t) = 1$ si $|t| > \epsilon$ y $g_\epsilon(t) = 0$ si $|t| < \epsilon/2$ entonces $g_\epsilon \circ h \in C^{\infty}(\Omega' \setminus D)$. Sea $\xi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\xi \geq 0$, definimos

$\xi_\epsilon = (g_\epsilon \circ h)\xi \in C_0^\infty(\Omega' \setminus D)$, entonces $\xi_\epsilon \geq 0$ y

$$\int_{\Omega'} v\Delta\xi_\epsilon = \int_{\Omega'} \Delta v \xi_\epsilon.$$

Como $\Delta\xi_\epsilon \to \Delta\xi$ c.t.p en Ω', sigue

$$\int_{\Omega'} v\Delta\xi = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega'} v\Delta\xi_\epsilon \leq 0.$$

Para el caso $n = 2$, la función

$$v(x) = \frac{-\ln r}{(\ln r)^2 + \theta^2}$$

es una función barrera de z en $\Omega \cap B(z, r_0)$, donde $0 < r_0 = |x_0 - z| < 1$ y $r = |x - z|$. ■

Definición 2.4. *Consideremos un operador diferencial de orden 2 en forma no divergente, esto es,*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} -a_{ij}D_{ij}u + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j u + cu \tag{2.3}$$

donde los coeficientes son funciones $a_{ij}, b_j, c : \Omega \to \mathbb{R}$.

Diremos que L es un operador fortemente elíptico *en Ω si*

$$\sum_{i,j=i}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \Omega$ donde $c_0 > 0$ es independiente de $x \in \Omega$. c_0 es llamado módulo (o constante) de elipticidad fuerte*.*

El siguiente teorema es demostrado en [6], Teorema 8.31.

Teorema 2.1. *Sea $Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}D_j u) + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j u + cu$ fuertemente elíptico con coeficientes en $L^\infty(\Omega)$ de valores reales y $c \geq 0$. Si $f \in L^{q/2}(\Omega)$ para algún $q > n$ y Ω es Wiener regular, entonces para $\varphi \in C(\partial\Omega)$ existe una única función $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaciendo $u_{|\partial\Omega} = \varphi$ y $Lu = f$ débilmente en Ω, esto es,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}D_j u D_i\varphi + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega b_j D_j u\varphi + \int_\Omega cu\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A partir de ahora en adelante, L denotará el operador

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} -a_{ij}D_{ij}u + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j u + cu \tag{2.4}$$

satisfaciendo las siguientes condiciones:

(B_1) Existen constantes $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ tales que

$$\lambda_0|x|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda_1|x|^2, \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(B_2) Los coeficientes de L pertenecen a $L^\infty(\Omega)$ y $\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega}$, $\|b_j\|_{\infty,\Omega}$, $\|c\|_{\infty,\Omega} \leq \Lambda$.

(B_3) Existen constantes $\gamma, \nu > 0$ tales que $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \leq \gamma$, $\text{máx}\{\left(\frac{|b|}{\lambda_0}\right)^2, \frac{|c|}{\lambda_0}\} \leq \nu$, donde $|b| = (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{1/2}$.

El siguiente teorema puede ser consultado en [14] (§6,1, Teorema 1.9) y [6] (Teorema 9.1)

Teorema 2.2 (Principio Máximo de Alexandroff-Balkeman-Pucci)**.** *Asumamos que Ω es limitado y $c \geq 0$. Si $f \in L^n(\Omega)$ y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ verifican $Lu \leq f$, entonces*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + C\|f^+/\lambda_0\|_{n,\Omega}$$

o

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\|f/\lambda_0\|_{n,\Omega}$$

donde la constante C sólo depende de n, diam Ω y $\|b_j/\lambda_0\|_{L^n(\Omega)}$, $j = 1, \dots, n$.

Teorema 2.3. *Sea $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, una solución de $Lu = f$ en Ω, donde $f \in L^p(\Omega)$ y $a_{ij} \in C(\Omega)$. Si $f \in L^q(\Omega)$ para algún $q \in (p, \infty)$ entonces $u \in W^{2,q}_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $a_{ij} = a_{ji}$, el caso general sigue tomando $\widetilde{a}_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$. Sean $x_0 \in \Omega$ y $0 < R < R' < R''$ tal que $B_{R''} \subset\subset \Omega$ ($B_R = B_R(x_0)$). Tomemos $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\eta = 1$ en $B_{R'}$ y $\eta = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_{R''}$. Sea $v = \eta u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ y $g = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_{ij}v$. Del Teorema C.9, $u \in W^{1,r}(B_{R'})$ donde $1/r = \text{máx}\{1/q, 1/p - 1/n\}$. Como $Lu = f \in L^q(\Omega)$ sigue que $g \in L^r(\Omega)$. Escribimos

$$L_0 v = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x_0) - a_{ij})D_{ij}v + g.$$

Si $Q = (q_{ij})$ es una matriz que define una transformación invertible $y = Qx$, haciendo $u(x) = \widetilde{u}(y)$ tenemos

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)D_{ij}u(x) = \sum_{k,l=1}^{n} \left[\sum_{i,j=1}^{n} q_{li}a_{ij}(x_0)q_{kj}\right] D_{kl}\widetilde{u}(y).$$

Así

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) D_{ij} u(x) = \sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{a}_{kl} D_{kl} \widetilde{u}(y)$$

donde $\widetilde{A} = [\widetilde{a}_{ij}] = QAQ^t$ y $A = [a_{ij}(x_0)]$. Podemos escoger una matriz invertible Q tal que $I = QAQ^t$, así la transformación $y = Qx$ lleva $L_0 v(x)$ en $\Delta \widetilde{v}(y)$. Luego

$$\Delta \widetilde{v} = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - \widetilde{a}_{ij}) D_{ij} \widetilde{v} + \widetilde{g}$$

donde $\widetilde{v}$, $\widetilde{a}_{ij}$, $\widetilde{g}$ corresponden a v, a_{ij}, g respectivamente. Tomando potencial Newtoniano (Apéndice D), obtenemos la ecuación

$$\widetilde{v} = N \left[\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - \widetilde{a}_{ij}) D_{ij} \widetilde{v} \right] + N \widetilde{g}.$$

Consecuentemente la función $\widetilde{v}$ satisface la ecuación

$$\widetilde{v} = T \widetilde{v} + h. \tag{2.5}$$

Afirmamos que T es una aplicación lineal continua de $W^{2,p}(\widetilde{B}_R)$ en sí mismo, donde $\widetilde{B}_R = Q(B_R)$, para cualquier $1 < p < \infty$. En efecto, del Teorema D.1, T lleva $W^{2,p}(\widetilde{B}_R)$ en sí mismo. Del Teorema C.8, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tw\|_{2,p,\widetilde{B}_R} \leq C \left(|Tw|_{2,p,\widetilde{B}_R} + \|Tw\|_{p,\widetilde{B}_R} \right)$$

para todo $w \in W^{2,p}(\widetilde{B}_R)$. Luego, del Teorema D.1,

$$\|Tw\|_{2,p,\widetilde{B}_R} \leq C \left(\left\| \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - \widetilde{a}_{ij}) D_{ij} w \right\|_{p,\widetilde{B}_R} \right), \tag{2.6}$$

por la continuidad de a_{ij} sigue que T es continuo.

De (2.6) y de la continuidad de los a_{ij}, existe um $\delta > 0$ tal que $\|T\| < 1$ si $R < \delta$. Como $h = N\widetilde{g} \in L^r(\widetilde{B}_R)$, por el Teorema del Punto Fijo de Banach (2.5) tiene una única solución $w \in W^{2,p}(\widetilde{B}_R)$ para cualquier $p \in [1, r]$. Así $\widetilde{v} = w \in W^{2,r}(\widetilde{B}_R)$, por tanto $\widetilde{v} \in W^{2,r}_{\text{loc}}(Q(\Omega))$ o equivalentemente $u \in W^{2,r}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Para $p \geq n$, tenemos $r = q$. Si $p < n$, existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $mp < n \leq (m+1)p$, escribiendo $r_i = np/(n - ip)$ con $i = 1, \ldots, m$ tenemos $1/r_{i+1} = 1/r_i - 1/n$. Si $i_0 = \max\{i : r_i < q\}$ entonces $u \in W^{2,r_{i_0}}_{\text{loc}}(\Omega)$ y $1/q > 1/r_{i_0} - 1/n$. Por tanto $u \in W^{2,q}_{\text{loc}}(\Omega)$. ■

Teorema 2.4. *Sea* $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *una solución de* $Lu = f$ *en* Ω *donde* $a_{ij} \in C(\Omega)$ *y* $f \in L^p(\Omega)$. *Entonces para cualquier* $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$\|u\|_{2,p,\Omega'} \leq C(\|u\|_{p,\Omega} + \|f\|_{p.\Omega}), \tag{2.7}$$

donde C *depende de* n, p, λ_0, Λ, Ω', Ω *y del módulo de continuidad de* a_{ij} *en* Ω'.

Demostración. Vamos suponer Ω es limitado y $a_{ij} = a_{ji}$. Sea $x_0 \in \Omega'$ y denotemos por L_0 el operador con coeficientes constantes

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) D_{ij} u.$$

Por medio de una transformación Q, como en la prueba del Teorema 2.3, $\Delta\widetilde{u}(y) = L_0 u(x)$. Haciendo cálculos obtenemos

$$|u|_{2,p,\Omega} \leq \frac{n^3}{\lambda_0 |\det Q|^{1/p}} |\widetilde{u}|_{2,p,Q(\Omega)}, \quad \|\Delta\widetilde{u}\|_{p,Q(\Omega)} \leq |\det Q|^{1/p} |L_0 u|_{2,p,\Omega},$$

para todo $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Por tanto, del Corolario D.1,

$$|u|_{2,p,\Omega} \leq \frac{C}{\lambda_0} \|L_0 u\|_{p,\Omega} \tag{2.8}$$

para todo $u \in W^{2,p}_0(\Omega)$, donde $C = C(n,p)$. Consecuentemente para todo u con suporte compacto en $B_R = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, escribiendo

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x_0) - a_{ij}) D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u,$$

tenemos de (2.8)

$$|u|_{2,p,\Omega} \leq \frac{C}{\lambda_0} \left(\sup_{B_R} |a - a(x_0)| |u|_{2,p,\Omega} + \left\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{p,\Omega} \right),$$

donde $a = [a_{ij}]$. Usando el módulo de continuidad de los a_{ij} en Ω', existe un número positivo tal que

$$|a - a(x_0)| \leq \frac{\lambda_0}{2C}$$

si $|x - x_0| < \delta$, luego

$$|u|_{2,p,\Omega} \leq C \left\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{p,\Omega}$$

siempre que $R \leq \delta$, donde $C = C(n, p, \lambda_0)$.

Para $\sigma \in (0,1)$, introducimos la función $\eta \in C_0^2(B_R)$ satisfaciendo $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ en $B_{\sigma R}$, $\eta = 0$ para $|x - x_0| > \sigma' R$, $\sigma' = (1+\sigma)/2$, $\sup_{B_R} |D_i \eta| \leq (1-\sigma)R/4$, $\sup_{B_R} |D_{ij}\eta| \leq (1-\sigma)^2 R^2/16$ (tal función puede ser construida como en [19], $\S 7{,}4$). Entonces, si $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisface $Lu = f$ en Ω y $v = \eta u$,

$$\begin{aligned} |u|_{2,p,B_{\sigma R}} &\leq C \left\| \eta \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i \eta D_j u + u \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} \eta \right\|_{p,B_R} \\ &\leq C \left(\|f\|_{p,B_R} + \frac{1}{(1-\sigma)R} |u|_{1,p,B_{\sigma' R}} + \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \|u\|_{p,B_R} \right) \end{aligned}$$

siempre que $R \leq \delta \leq 1$, donde $C = C(n, p, \lambda_0, \Lambda)$. Introducimos la seminorma

$$\phi_k = \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k R^k |u|_{k,p,B_{\sigma R}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

por tanto tenemos

$$\phi_2 \leq C(R^2 \|f\|_{p,B_R} + \phi_1 + \phi_0). \tag{2.9}$$

Afirmamos que ϕ_k satisface la desigualdad de interpolación

$$\phi_1 \leq \epsilon \phi_2 + \frac{C}{\epsilon} \phi_0 \tag{2.10}$$

para cualquier $\epsilon > 0$, donde $C = C(n, p)$. En efecto, para $\gamma > 0$, tomemos un $\sigma = \sigma(\gamma)$, tal que

$$\phi_1 \leq (1-\sigma) R |u|_{1,p,B_{\sigma R}} + \gamma,$$

del Teorema C.8

$$\phi_1 \leq \epsilon (1-\sigma)^2 R^2 |u|_{2,p,B_{\sigma R}} + \frac{C}{\epsilon} \|u\|_{p,B_R} + \gamma,$$

haciendo $\gamma \to 0$, obtenemos (2.10).
Usando (2.10) en (2.9), conseguimos

$$\phi_2 \leq C(R^2 \|f\|_{p,B_R} + \phi_0),$$

esto es,

$$|u|_{2,p,B_{\sigma R}} \leq \frac{C}{(1-\sigma)^2 R^2}(R^2\|f\|_{p,B_R} + \|u\|_{p,B_R}),$$

donde $C = C(n, p, \lambda_0, \Lambda)$ y $0 < \sigma < 1$.

Tomando $\sigma = 1/2$ y cubriendo Ω' por un número finito de bolas de radio $R/2$ para $R \leq \text{mín}\{\delta, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)\}$ y usando el Teorema C.8 obtenemos la estimativa (2.7). ■

Usaremos K_0 y $K_R(y)$ para denotar cubos con lados paralelos a los ejes coordenados. $K_R(y)$ es un cubo de centro y y lado R.

Lema 2.2. *Sea K_0 un cubo en $\mathbb{R}^n$. Suponga que Γ sea un subconjunto medible de K_0. Para $0 < \delta < 1$, sea*

$$\Gamma_\delta = \bigcup\{K_{3R}(y) \cap K_0 : K_R(y) \subset K_0, |\Gamma \cap K_R(y)| \geq \delta|K_R(y)|\}.$$

Si $\Gamma_\delta \neq K_0$, entonces $|\Gamma| \leq \delta|\Gamma_\delta|$.

Demostración. Si $|K_0 \cap \Gamma| > \delta|K_0|$, entonces obviamente $\Gamma_\delta = K_0$. Por tanto, si $\Gamma_\delta \neq K_0$, $|K_0 \cap \Gamma| \leq \delta|K_0|$. Dividamos K_0 en 2^n cubos congruentes y lo denotamos por $(K(i_1))_{i_1=1}^{2^n}$. Para cada $K(i_1)$ existen 2 posibilidades

(1) $|\Gamma \cap K(i_1)| \leq \delta|K(i_1)|$,

(2) $|\Gamma \cap K(i_1)| > \delta|K(i_1)|$.

Denotamos por $\mathscr{F}_1$ la colección de todos los cubos $K(i_1)$ perteneciendo al caso (2). Para cada cubo $K(i_1)$ perteneciendo al caso (1) lo dividimos en 2^n cubos congruentes y lo denotamos por $K(i_1, i_2)$ ($i_2 = 1, \ldots, 2^n$). Existen también dos posibilidades para $K(i_1, i_2)$. Denotemos por $\mathscr{F}_2$ la colección de todos los cubos $K(i_1, i_2)$ perteneciendo al caso (2). Continuando este proceso, conseguimos una sucesión $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_m, \ldots$ de colección de cubos perteneciendo al caso (2). Ahora denotamos

$$\mathscr{F} = \{K(i_1, \ldots, i_{m-1}) : K(i_1, \ldots, i_{m-1}, i_m) \in \mathscr{F}_m\}. \tag{2.11}$$

Para $K(i_1, \ldots, i_m) \in \mathscr{F}_m$ es claro que

$$|K(i_1, \ldots, i_m) \cap \Gamma| > \delta|K(i_1, \ldots, i_m)| \tag{2.12}$$

$$|K(i_1, \ldots, i_{m-1}) \cap \Gamma| \leq \delta|K(i_1, \ldots, i_{m-1})|. \tag{2.13}$$

La definición de Γ_δ implica que $K(i_1, \ldots, i_{m-1}) \subset \Gamma_\delta$. Sigue que

$$\widetilde{\Gamma}_\delta = \bigcup_{K \in \mathscr{F}} K \subset \Gamma_\delta.$$

Por otro lado, (2.13) implica que

$$\begin{aligned} |\widetilde{\Gamma}_\delta \cap \Gamma| &= \left| \bigcup_{K \in \mathscr{F}} (K \cap \Gamma) \right| = \sum_{K \in \mathscr{F}} |K \cap \Gamma| \\ &\leq \delta \sum_{K \in \mathscr{F}} |K| = \delta |\widetilde{\Gamma}_\delta| \leq \delta |\Gamma_\delta|. \end{aligned}$$

Es claro, de la división anterior, que cualquier punto de densidad ([20], $\S 6{,}2$) de Γ pertenece a $\widetilde{\Gamma}_\delta$. Como Γ es medible, casi todo punto de Γ es un punto de densidad ([20], Corolario 6.2.6). Sigue que

$$|\Gamma| = |\widetilde{\Gamma}_\delta \cap \Gamma| \leq \delta |\Gamma_\delta|.$$ ■

Teorema 2.5 (Desigualdad débil de Harnack). *Sea $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisfaciendo $Lu \geq f$ en Ω, donde $f \in L^n(\Omega)$, y suponga que u es no negativa en la bola $B_{2R}(y) \subset \Omega$. Entonces existe $p > 0$ y $C > 1$ tales que*

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u^p \right)^{1/p} \leq C \left(\inf_{B_R(y)} u + \frac{R}{\lambda_0} \|f\|_{n, B_{2R}(y)} \right) \tag{2.14}$$

donde p y C son constantes positivas dependiendo solamente de n, γ y ν.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $\lambda_0 = 1$. Primeramente asumiremos que $R = 1/2$ e y es el origen. Como la prueba es larga, lo dividiremos en cinco pasos.

Paso 1. Si

$$\widetilde{u} = u + \|f\|_{n, B_1}, \quad \Gamma = \{x \in B_1 : \widetilde{u} \geq 1\},$$

probaremos que existe $C > 1$ y $0 < \delta < 1$ tal que, si $|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta |K_{2\alpha}|$, entonces

$$\inf_{K_{6\alpha}} \widetilde{u} \geq C^{-1}, \tag{2.15}$$

donde K_α denota el cubo centrado en el origen con lados paralelos a los ejes coordenados y con longitud α, $\alpha = 1/(6\sqrt{n})$, C y δ depende solamente de n, γ y ν.

Para $\epsilon > 0$, denotamos $w = \ln \frac{1}{\widetilde{u} + \epsilon}$, $g = \frac{f}{\widetilde{u} + \epsilon}$ y $v = \eta w$ donde $\eta(x) = (1 - |x|^2)^\beta$.

Derivando y usando la desigualdad de Schwartz tenemos

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} v &= -\eta \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} w - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i \eta D_j w - w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} \eta \\
&\leq \eta(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i w D_j w - \sum_{i=1}^{n} b_i D_i w + |c| + |g|) \\
&\quad - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i \eta D_j w - w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} \eta \\
&\leq \eta(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i w D_j w + |b|^2 + |c| + |g|) - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i \eta D_j w \\
&\quad - w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} \eta \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} \eta a_{ij} D_i w D_j w - 2a_{ij} D_i \eta D_j w - w a_{ij} D_{ij} \eta \right) + \eta(|b|^2 + |c| + |g|).
\end{aligned}
$$

Por la condición de elipticidad

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (\eta/2 D_i w + D_i \eta)(\eta/2 D_j w + D_j \eta) \\
&= \frac{\eta}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \eta a_{ij} D_i w D_j w + 2a_{ij} D_i \eta D_j w + \frac{2}{n} a_{ij} D_i \eta D_j \eta \right),
\end{aligned}
$$

entonces

$$
-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} v \leq \frac{2}{\eta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i \eta D_j \eta - w \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} \eta + \eta(|b|^2 + |c| + |g|).
$$

Como

$$
\begin{aligned}
D_i \eta &= -2\beta x_i (1 - |x|^2)^{\beta - 1} \\
D_{ij} \eta &= -2\beta \delta_{ij} (1 - |x|^2)^{\beta - 1} + 4\beta(\beta - 1) x_i x_j (1 - |x|^2)^{\beta - 2},
\end{aligned}
$$

tenemos

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} \eta = -\sum_{i=1}^{n} 2\beta a_{ii} (1 - |x|^2)^{\beta - 1} + \sum_{i,j=1}^{n} 4\beta(\beta - 1) a_{ij} x_i x_j (1 - |x|^2)^{\beta - 2}
$$

y $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}\eta \geq 0$ siempre que

$$\sum_{i,j=1}^{n} 2(\beta-1)a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

y, en particular, si

$$2\beta|x|^2 \geq n\Lambda.$$

Consecuentemente, si $0<\alpha<1$ y β son escogidos tales que

$$\beta \geq \frac{n\gamma}{2\alpha^2}$$

tenemos $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}\eta \geq 0$ para todo $|x|\geq\alpha$. Luego, en $B^+ = \{x\in B_1 : w(x)>0\}$,

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}v &\leq \sum_{i,j=1}^{n} 8\beta^2 a_{ij}x_ix_j(1-|x|^2)^{\beta-2} + v\left(\frac{-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}\eta}{\eta}\right) + (|b|^2+|c|+|g|)\\
&\leq 8\beta^2\Lambda_0 + v\chi(B_\alpha)\sup_{B_\alpha}\left(\frac{-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}\eta}{\eta}\right) + (|b|^2+|c|+|g|)
\end{aligned}$$

donde $\chi(B_\alpha)$ es la función característica en B_α. Como

$$\|g/\lambda_0\|_{n,B_1} \leq 1,$$

el Principio de Máximo de Alexandroff-Bakelman-Pucci (Teorema 2.2) implica que

$$\sup_{B^+} v \leq \sup_{\partial B^+} v + C(1+\|v^+\|_{n,B_\alpha})$$

donde C depende solamente de n, α, γ y ν. Como $\sup_{B^+} v = \sup_{B_1} v$ y $\sup_{\partial B^+} v = 0$, entonces

$$\sup_{B_1} v \leq C(1+\|v^+\|_{n,B_\alpha}). \tag{2.16}$$

Para poder usar el Lema 2.2, trabajaremos con cubos en lugar de bolas. De (2.16),

$$\sup_{B_1} v \leq C[1+\|v^+\|_{n,K_\alpha}] \leq C\left[1+|K_\alpha^+|^{1/n}\sup_{B_1} v\right],$$

donde $K_\alpha^+ = \{x\in K_\alpha : v>0\} = \{x\in K_\alpha : \widetilde{u}+\epsilon<1\}$. Si

$$\frac{|K_\alpha^+|}{|K_\alpha|} \leq \theta = \frac{1}{(2C)^n|K_\alpha|} = \frac{1}{(2C\alpha)^n},$$

entonces

$$\sup_{B_1} v \leq 2C,$$

esto es,

$$\inf_{B_{1/2}} (\widetilde{u} + \epsilon) \geq \frac{1}{C}. \tag{2.17}$$

donde C depende solamente de n, α, γ y ν. Haciendo $\epsilon \to 0$ en (2.17), deducimos que si

$$\frac{|K_\alpha^+|}{|K_\alpha|} \leq \theta$$

donde $K_\alpha^+ = \{x \in K_\alpha : \widetilde{u} < 1\}$, entonces

$$\inf_{B_{1/2}} \widetilde{u} \geq C^{-1}.$$

Tomemos $\delta = 1 - \theta$ y $\alpha = 1/(6\sqrt{n})$. Por tanto, si $|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta |K_{2\alpha}|$, entonces

$$|K_{2\alpha}^+| = |K_{2\alpha} \setminus (\Gamma \cap K_{2\alpha})| \leq (1-\delta)|K_{2\alpha}| = \theta |K_{2\alpha}|.$$

Sigue que

$$\inf_{K_{6\alpha}} \widetilde{u} \geq \inf_{B_{1/2}} \widetilde{u} \geq C^{-1}.$$

Paso 2. Afirmamos que para cada entero positivo m, si

$$|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta^m |K_{2\alpha}|, \tag{2.18}$$

entonces

$$\inf_{K_{2\alpha}} \widetilde{u} \geq C^{-m} \tag{2.19}$$

donde C es la constante determinada en el Paso 1.

(2.19) es válido cuando $m = 1$. Ahora usaremos inducción sobre m. Supongamos válido para m, mostraremos que también es válido para $m+1$. Suponga que

$$|\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta^{m+1} |K_{2\alpha}|. \tag{2.20}$$

Definamos $\widetilde{K}_0 = K_{2\alpha}$ y

$$\Gamma_\delta = \bigcup \{K_{3r}(x) \cap \widetilde{K}_0 : K_r(x) \subset \widetilde{K}_0,\ |\Gamma \cap K_r(x)| \geq \delta |K_r(x)|\}.$$

Del Lema 2.2

$$\Gamma_\delta = \widetilde{K}_0 \quad \text{o} \quad |\Gamma \cap \widetilde{K}_0| \leq \delta |\Gamma_\delta|.$$

De la definición de Γ_δ y Paso 1 tenemos que

$$\inf_{\Gamma_\delta} \widetilde{u} \geq C^{-1}. \tag{2.21}$$

En efecto, consideremos $\epsilon = \|f\|_{n,B_1} - \frac{r}{2\alpha}\|f\|_{n,B_{\frac{r}{2\alpha}}(x)} \geq 0$, la transformación $y \xrightarrow{T} \frac{2\alpha}{r}(y-x)$ y $v = u \circ T^{-1}$. Denotemos $\widehat{K}^+_{2\alpha} = \{x \in K_{2\alpha} : \widetilde{v} + \epsilon < 1\}$, $\widehat{K}^+_{2\alpha} \subset T(K^+_r(x))$. Como $|\Gamma \cap K_r(x)| \geq \delta |K_r(x)|$, entonces $|K^+_r(x)| \leq \theta |K_r|$. Luego, $|\widehat{K}^+_{2\alpha}| \leq \theta |K_{2\alpha}|$. Por tanto, del Paso 1, $\inf_{K_{3r}(x)} \widetilde{u} \geq \inf_{K_{6\alpha}} (\widetilde{v} + \epsilon) \geq C^{-1}$.

Si $\Gamma_\delta = \widetilde{K}_0 = K_{2\alpha}$, entonces (2.21) implica (2.19). Ahora asumamos que $|\Gamma \cap \widetilde{K}_0| \leq \delta |\Gamma_\delta|$. La función $v = Cu$ satisface

$$Lv \geq Cf.$$

Usando la notación del Paso 1, obtenemos

$$\widetilde{v} = v + \|Cf\|_{n,B_1} = C\widetilde{u}.$$

Sigue de (2.21) que

$$\Gamma_\delta \subset \widetilde{\Gamma} = \{x \in B_1 : \widetilde{v} \geq 1\}.$$

Combinando este hecho y (2.20), obtenemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{K}_0| &\geq |\Gamma_\delta| \geq \frac{1}{\delta} |\Gamma \cap \widetilde{K}_0| \\ &= \frac{1}{\delta} |\Gamma \cap K_{2\alpha}| \geq \delta^m |K_{2\alpha}| = \delta^m |\widetilde{K}_0|. \end{aligned}$$

Por inducción

$$\inf_{K_{2\alpha}} \widetilde{v} \geq C^{-m},$$

esto es,

$$\inf_{K_{2\alpha}} \widetilde{u} \geq C^{-(m+1)}.$$

Paso 3. Si

$$\Gamma_t = \{x \in B_1 : \widetilde{u} > t\}. \tag{2.22}$$

Afirmamos que existe $C > 1$, $\mu > 0$ tales que para todo $t > 0$,

$$|B_\alpha \cap \Gamma_t| \leq C |B_\alpha| \left[\inf_{B_\alpha} \frac{\widetilde{u}}{t} \right]^\mu, \tag{2.23}$$

donde C, μ depende solamente de n, γ y ν.

Si $v = \frac{u}{t}$. Usando la notación del Paso 1, $\widetilde{v} = \frac{\widetilde{u}}{t}$. Sea

$$\widetilde{\Gamma} = \{x \in B_1 : \widetilde{v}(x) > 1\} = \Gamma_t.$$

Si $|K_{2\alpha} \cap \Gamma_t| = 0$, entonces (2.23) es claramente válido. Ahora asumamos que $|K_{2\alpha} \cap \Gamma_t| \neq 0$, entonces existe un entero positivo m tal que

$$\delta^m |K_{2\alpha}| \leq |\widetilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}| \leq \delta^{m-1} |K_{2\alpha}|,$$

esto es,

$$\ln \frac{|\widetilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}|}{|K_{2\alpha}|} \cdot (\ln \delta)^{-1} \leq m \leq 1 + \ln \frac{|\widetilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}|}{|K_{2\alpha}|} \cdot (\ln \delta)^{-1}.$$

De (2.19), deducimos que

$$\inf_{K_{2\alpha}} \widetilde{v} \geq C^{-m} \geq C^{-1} \left[\frac{|\widetilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}|}{|K_{2\alpha}|} \right]^{\ln C / \ln \delta^{-1}}.$$

Tomando $\mu = \ln \delta^{-1} / \ln C$,

$$|\widetilde{\Gamma} \cap K_{2\alpha}| \leq \left(C \inf_{K_{2\alpha}} \widetilde{v} \right)^{\mu} |K_{2\alpha}|.$$

De esta desigualdad sigue (2.23).

Paso 4. Ahora probaremos que existe $p > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B_\alpha|} \int_{B_\alpha} u^p \, dx \right)^{1/p} \leq C \left[\inf_{B_\alpha} u + \|f\|_{n,B_1} \right]. \tag{2.24}$$

Por propiedad ([14], Lema 1.1, pag. 37)

$$\begin{aligned} \int_{B_\alpha} u^p \, dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| \, dt \\ &= p \int_0^d t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| \, dt + p \int_d^\infty t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| \, dt, \end{aligned}$$

donde d será determinado. Aplicando la estimativa del Paso 3 al segundo término del lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos

$$\int_{B_\alpha} u^p \leq p \int_0^d t^{p-1} |B_\alpha \cap \Gamma_t| \, dt + p \int_d^\infty C m_0^{\mu} |B_\alpha| t^{p-\mu-1} \, dt$$

donde $m_0 = \operatorname{ínf}_{B_\alpha} \widetilde{u}$. Tomando $p = \mu/2$,

$$\int_{B_\alpha} u^p \, dx \le d^p |B_\alpha| + C m_0^{2p} d^{-p} |B_\alpha|.$$

Si escogemos $d = C^{1/(2p)} m_0$, entonces

$$\frac{1}{|B_\alpha|} \int_{B_\alpha} u^p \, dx \le 2C^{1/2} m_0^p \le 2C^{1/2} \left(\operatorname*{ínf}_{B_\alpha} u + \|f\|_{n,B_1} \right)^p .$$

Paso 5. Usando un argumento de recubrimiento finito, probaremos que

$$\left(\frac{1}{|B_{1/2}|} \int_{B_{1/2}} u^p \, dx \right)^{1/p} \le C \left(\operatorname*{ínf}_{B_{1/2}} u + \|f\|_{n,B_1} \right). \tag{2.25}$$

Como $u \in W^{2,n}(B_{1/2})$, existe $x_0 \in \overline{B}_{1/2}$ tal que

$$u(x_0) = \operatorname*{ínf}_{B_{1/2}} u. \tag{2.26}$$

Claramente,

$$\int_{B_{(2+\alpha)/4}} dy \int_{B_{\alpha/4(y)}} u^p \, dx = \int_{B_{\alpha/4}} d\xi \int_{B_{(2+\alpha)/4}} u(y+\xi)^p \, dy \ge |B_{\alpha/4}| \int_{B_{1/2}} u(y)^p \, dy.$$

Por el teorema de valor medio, existe $y_0 \in \overline{B}_{(2+\alpha)/4}$ tal que

$$\int_{B_{(2+\alpha)/4}} dy \int_{B_{\alpha/4(y)}} u^p \, dx = |B_{(2+\alpha)/4}| \int_{B_{\alpha/4(y_0)}} u^p \, dy.$$

De ahí

$$\int_{B_{\alpha/4(y_0)}} u^p \, dx \ge \left(\frac{\alpha}{2+\alpha} \right)^n \int_{B_{1/2}} u^p \, dx. \tag{2.27}$$

Queremos cubrir el segmento de recta que une x_0 a y_0 por una sucesión de bolas de radio $\alpha/4$. Tomemos una sucesión de bolas $\{B_{\alpha/4}(x_k)\}_{k=1}^N$ tales que

$$x_k \in \overline{B}_{(2+\alpha)/4}, \quad x_{k+1} \in B_{\alpha/4}(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1), \quad x_N = y_0, \quad N \le \frac{8}{\alpha}.$$

Afirmamos que (2.24) también si verifica para cada $B_{\alpha/4}(x_k)$, esto es,

$$\left(\frac{1}{|B_{\alpha/4|}} \int_{B_{\alpha/4}(x_k)} u^p \, dx \right)^{1/p} \le C \left[\operatorname*{ínf}_{B_{\alpha/4}(x_k)} u + \|f\|_{n,B_{1/4}(x_k)} \right]. \tag{2.28}$$

En efecto, considerando la transformación $x \xrightarrow{T} 4(x-x_k)/\alpha$ y $v = u \circ T^{-1}$, tenemos

$$L_0 v = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} v + \sum_{j=1}^{n} (\alpha/4) b_j D_j v + (\alpha/4)^2 c v \geq f \circ T^{-1} \quad \text{en } B_1,$$

donde L_0 satisface las mismas condiciones de L. Luego usando (2.24) sigue lo afirmado. Así sigue que

$$\begin{aligned}
\inf_{B_{\alpha/4}(x_k)} u &\geq \frac{1}{C}\left[\frac{1}{|B_{\alpha/4}(x_k)|}\int_{B_{\alpha/4}(x_k)} u^p\,dx\right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_{1/4}(x_k)}\\
&\geq \frac{1}{C}\left[\frac{1}{|B_{\alpha/4}|}\int_{B_{\alpha/4}(x_k)\cap B_{\alpha/4}(x_{k+1})} u^p\,dx\right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_1}\\
&\geq \frac{1}{C}\left[\frac{|B_{\alpha/4}(x_k)\cap B_{\alpha/4}(x_{k+1})|}{|B_{\alpha/4}|}\right]^{1/p} \inf_{B_{\alpha/4}(x_{k+1})} u - \|f/\lambda_0\|_{n,B_1}\\
&\geq \frac{1}{\widetilde{C}} \inf_{B_{\alpha/4}(x_{k+1})} u - \|f/\lambda_0\|_{n,B_1}.
\end{aligned}$$

Ya que podemos tomar los $B_{\alpha/4}(x_k)'$ tales que $B_{\alpha/4}(x_k) \cap B_{\alpha/4}(x_{k+1})$ contiene una bola de radio $\alpha/2^r$ con $r > n/p+1$, entonces $\widetilde{C} \geq 2$. Iterando la desigualdad anterior, obtenemos

$$\inf_{B_{\alpha/4}(x_0)} u \geq \frac{1}{\widetilde{C}^N} \inf_{B_{\alpha/4}(y_0)} u - 2\|f/\lambda_0\|_{n,B_1}. \tag{2.29}$$

Usando (2.28) otra vez en $B_{\alpha/4}(y_0)$ y de (2.27) obtenemos

$$\begin{aligned}
\inf_{B_{\alpha/4}(y_0)} u &\geq \frac{1}{C}\left[\frac{1}{|B_{\alpha/4}(y_0)|}\int_{B_{\alpha/4}(y_0)} u^p\,dx\right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_{\alpha/4}(y_0)}\\
&\geq \frac{1}{C}\frac{1}{|B_{\alpha/4}(y_0)|}\left(\frac{\alpha}{2+\alpha}\right)^{n/p}\left[\int_{B_{1/2}} u^p\,dx\right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_1}\\
&= \frac{1}{C}\left[\frac{1}{|B_{1/2}|}\int_{B_{1/2}} u^p\,dx\right]^{1/p} - \|f/\lambda_0\|_{n,B_1}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Combinando (2.29) y (2.30) obtenemos (2.25).

Finalmente la desigualdad (2.14) sigue usando la transformación $x \mapsto \frac{x-y}{2R}$. ■

Lema 2.3. *Sea ω una función no decreciente en $(0, R_0]$ satisfaciendo, para todo $R \leq R_0$, la desigualdad*

$$\omega(\tau R) \leq \kappa\omega(R) + \sigma(R)$$

donde σ es también no decreciente y $0 < \kappa, \tau < 1$. Entonces, para cualquier $\mu \in (0,1)$ y $R \leq R_0$, tenemos

$$\omega(R) \leq C\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\omega(R_0) + \sigma(R^{\mu}R_0^{1-\mu})\right) \tag{2.31}$$

donde $C = C(\kappa, \tau)$ y $\alpha = \alpha(\kappa, \tau, \mu)$ son constantes positivas.

Demostración. Primero fijemos un $R_1 \leq R_0$. Entonces para cualquier $R \leq R_1$ tenemos

$$\omega(\tau R) \leq \kappa\omega(R) + \sigma(R_1).$$

Ahora iterando esta desigualdad conseguimos, para cualquier entero positivo m,

$$\begin{aligned}\omega(\tau^m R_1) &\leq \kappa^m\omega(R_1) + \sigma(R_1)\sum_{i=0}^{m-1}\kappa^i \\ &\leq \kappa^m\omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\kappa}.\end{aligned}$$

Para $R \leq R_1$, podemos escoger m tal que $\tau^m R_1 < R \leq \tau^{m-1}R_1$, entonces

$$\begin{aligned}\omega(R) \leq \omega(\tau^{m-1}R_1) &\leq \kappa^{m-1}\omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\kappa} \\ &\leq \frac{1}{\kappa}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\ln\kappa/\ln\tau}\omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\kappa}.\end{aligned}$$

Haciendo $R_1 = R_0^{1-\mu}R^{\mu}$ tenemos

$$\omega(R) \leq \frac{1}{\kappa}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{(1-\mu)\ln\kappa/\ln\tau}\omega(R_0) + \frac{\sigma(R_0^{1-\mu}R^{\mu})}{1-\kappa}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.6. *Sea $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfaciendo la ecuación $Lu = f$ en Ω, con $c \geq 0$ y $f \in L^n(\Omega)$. Entonces, para cualquier bola $B_{R_0}(y) \subset \Omega$ y $R \leq R_0$, tenemos*

$$\operatorname*{osc}_{B_R(y)} u \leq C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\left(\operatorname*{osc}_{B_{R_0}(y)} u + kR_0\right) \tag{2.32}$$

donde $C = C(n, \gamma, \nu)$ y $\alpha = \alpha(n, \gamma, \nu)$ son constantes positivas y $k = \|f - cu\|_{n, B_{R_0}(y)}$.

Demostración. Para $0 < R \leq R_0/2$ escribimos $M_2 = \sup_{B_{2R}(y)} u$, $m_2 = \inf_{B_{2R}(y)} u$, $M_1 = \sup_{B_R(y)} u$ y $m_1 = \inf_{B_R(y)} u$. Entonces

$$\begin{aligned}L(M_2 - u) &= M_2 c - f \geq cu - f \\ L(u - m_2) &= f - m_2 c \geq f - cu\end{aligned}$$

en $B_{2R}(y)$. Aplicando el Teorema 2.5 a las funciones M_2-u, $u-m_2$ en $B_R(y)$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{|B_R(y)|}\int_{B_R(y)}(M_2-u)^p\right)^{1/p}\leq C\left(\inf_{B_R(y)}(M_2-u)+\frac{R}{\lambda_0}k\right)$$
$$\left(\frac{1}{|B_R(y)|}\int_{B_R(y)}(u-m_2)^p\right)^{1/p}\leq C\left(\inf_{B_R(y)}(u-m_2)+\frac{R}{\lambda_0}k\right).$$

Esto implica que

$$M_2-m_2\leq C\left(M_2-m_2-(M_1-m_1)+\frac{2R}{\lambda_0}k\right),$$

escribiendo $\omega(R)=\operatorname{osc}_{B_R(y)}u$ tenemos

$$\omega(R)\leq\kappa\omega(2R)+\frac{2R}{\lambda_0}k,\quad 0<R\leq R_0/2.$$

Equivalentemente

$$\omega(1/2R)\leq\kappa\omega(R)+\frac{R}{\lambda_0}k$$

para todo $0<R\leq R_0$. Del Lema 2.3, tomando μ tal que $\alpha=(1-\mu)\frac{\ln\kappa}{\ln 1/2}<\mu$, tenemos

$$\begin{aligned}\omega(R)&\leq C\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\omega(R_0)+\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}R_0k\right)\\&\leq C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\left(\omega(R_0)+\frac{k}{\lambda_0}R_0\right)\end{aligned}$$

de donde sigue (2.32). ∎

La desigualdad débil de Harnack (Teorema 2.5) admite la siguiente extensión a la frontera.

Teorema 2.7. *Sea $u\in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ satisfaciendo $Lu\geq f$ en Ω, $u\geq 0$ en $B_{2R}(y)\cap\Omega$, donde $y\in\partial\Omega$. Si $m=\inf_{B_{2R}(y)\cap\partial\Omega}u$ y*

$$u_m^-(x)=\begin{cases}\inf\{u(x),m\}, & x\in B_{2R}(y)\cap\Omega\\ m, & x\in B_{2R}(y)\setminus\Omega.\end{cases}$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{|B_R(y)|}\int_{B_R(y)}u_m^{-p}\right)^{1/p}\leq C\left(\inf_{\Omega\cap B_R(y)}u+\frac{R}{\lambda_0}\|f\|_{n,\Omega\cap B_{2R}(y)}\right),\tag{2.33}$$

donde p y C son constantes positivas dependiendo solamente de n, γ y ν.

Demostración. La demostración del teorema es semejante al Teorema 2.5. Consideremos $\lambda_0 = 1$, $R = 1/2$ y $y = 0$. Denotando $u_0 = u_m^-$,

$$\widetilde{u}_0 = u_0 + \|f\|_{n,B_1\cap\Omega} \quad \text{y} \quad \Gamma = \left\{x \in B_1 : \frac{\widetilde{u}_0}{m} \geq 1\right\},$$

tenemos que los pasos 1, 2 y 3 siguen para $\widetilde{u}_0/m$. Note que $|\Gamma_t| = 0$ para $t < m_0/m$ donde $m_0 = \inf_{B_\alpha} \widetilde{u}_0$, así tomando $p = \mu/2$ sigue

$$\left(\frac{1}{|B_\alpha|}\int_{B_\alpha} u_0^p\, dx\right)^{1/p} \leq C\left(\inf_{B_\alpha} u_0 + \|f\|_{n,B_1\cap\Omega}\right).$$

Luego, como en el paso 5, sigue (2.25) para u_0. Finalmente tomando la transformación $x \mapsto \frac{x-y}{2R}$ se concluye la demostración del teorema. ■

Teorema 2.8. *Suponga que Ω satisface la condición del cono exterior en $x_0 \in \partial\Omega$. Sea $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaciendo $Lu = f$ en Ω donde $f \in L^n(\Omega)$ y $c \geq 0$. Entonces existe R_0 tal que para cualquier $0 < R \leq R_0$*

$$\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R(x_0)} u \leq C\left\{\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \left(\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_{R_0}(x_0)} u + kR_0\right) + \sigma(\sqrt{RR_0})\right\}, \tag{2.34}$$

donde $\sigma(R) = \operatorname*{osc}_{\partial\Omega\cap B_R} u$, $k = \|f - cu\|_{\Omega\cap B_{2R_0}(x_0)}$, $C = C(n,\gamma,\nu,V_{x_0})$ y $\alpha = \alpha(n,\gamma,\nu,V_{x_0})$ son constante positivas (V_{x_0} es el cono en x_0).

Demostración. Sea R_0 la altura de V_{x_0}. Para $R \leq R_0/2$ escribimos

$$\begin{aligned}
M_2 &= \sup_{\Omega\cap B_{2R}(x_0)} u, & M_1 &= \sup_{\Omega\cap B_R(x_0)} u, & M_0 &= \sup_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)} u,\\
m_2 &= \inf_{\Omega\cap B_{2R}(x_0)} u, & m_1 &= \inf_{\Omega\cap B_R(x_0)} u, & m_0 &= \inf_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)} u.
\end{aligned}$$

Entonces $L(M_2 - u) \geq cu - f$ y $L(u - m_2) \geq f - cu$ en $B_{2R}(x_0) \cap \Omega$. Como $M_2 - M_0 = \inf_{B_R(x_0)\cap\partial\Omega}(M_2 - u)$, $m_0 - m_2 = \inf_{B_R(x_0)\cap\partial\Omega}(u - m_2)$, del Teorema 2.7 sigue

$$\begin{aligned}
(M_2 - M_0)\left(\frac{|B_R(x_0) - \Omega|}{|B_R(x_0)|}\right)^{1/p} &\leq \left(\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} ((M_2 - u)^-_{M_2-M_0})^p\right)^{1/p}\\
&\leq C\left(\inf_{\Omega\cap B_R(x_0)} (M_2 - u) + \frac{R}{\lambda_0}k\right)
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
(m_0 - m_2)\left(\frac{|B_R(x_0) - \Omega|}{|B_R(x_0)|}\right)^{1/p} &\leq \left(\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)}((u-m_2)^-_{m_0-m_2})^p\right)^{1/p} \\
&\leq C\left(\inf_{\Omega\cap B_R(x_0)}(u-m_2) + \frac{R}{\lambda_0}k\right).
\end{aligned}
$$

Usando la condición del cono exterior en x_0 tenemos

$$
\begin{aligned}
(M_2 - M_0) \leq C\left(M_2 - M_1 + \frac{R}{\lambda_0}k\right) \\
(m_0 - m_2) \leq C\left(m_1 - m_2 + \frac{R}{\lambda_0}k\right)
\end{aligned}
$$

y sumando obtenemos

$$
\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R(x_0)} u \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right)\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_{2R}(x_0)} u + \frac{1}{C}\sigma(R) + \frac{2R}{\lambda_0}k
$$

para todo $R \leq R_0/2$. Podemos asumir que $C > 2$, tomando $\mu = 1/2$ y aplicando el Lema 2.3 obtenemos (2.34). ■

Teorema 2.9. *Sea Ω dominio limitado que satisface la condición del cono exterior uniforme, $f \in L^n(\Omega)$ y $c \geq 0$. Si $u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisface $Lu = f$ en Ω, entonces $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ y*

$$
\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{n,\Omega}) \tag{2.35}
$$

donde $\alpha = \alpha(n,\gamma,\nu,V)$ y $C = C((n,\gamma,\nu,V)$.

Demostración. Por compacidad $\overline{\Omega}$ puede ser cubierto por un número finito de bolas $\{B_i\}$ tales que, o B_i es una bola con centro en un punto de $\partial\Omega$ y de radio $R_0 =$ altura V, o $B_i \subset\subset \Omega$. De los Teoremas 2.7 y 2.5, $u \in C^\alpha(\overline{B}_i)$ y $\|u\|_{C^\alpha(\overline{B}_i)} \leq C_i(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{n,\Omega})$. Por tanto, $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ y sigue (2.35). ■

2.2 El Problema de Poisson

A partir de esta sección en adelante, Ω es un dominio limitado y $\mathcal{A}$ es el operador dado por (2.1) satisfaciendo (2.2). En esta sección mostraremos la existencia de solución para el problema

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

en $C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$, donde $f \in L^n(\Omega)$, en dos casos. El primero es cuando Ω es Wiener regular y a_{ij} son Lipschitz contínua (Teorema 2.10), y en el segundo Ω satisface la condición del cono exterior y $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$ (Teorema 2.11).

Lema 2.4. *Sea $h : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz continua. Entonces $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$. En particular $hu \in W^{1,2}(\Omega)$ para todo $u \in W^{1,2}(\Omega)$ y $D_j(hu) = (D_j h)u + hD_j u$.*

Demostración. Sea $H(x) = \text{ínf}_{y\in\Omega}[h(y) + K|x - y|]$ donde K es la constante de Lipschitz de h, entonces H es una extensión de h a $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo la condición de Lipschitz (con constante de Lipschitz K). En efecto, si $x \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \Omega$

$$\begin{aligned} h(y) + K|x - y| &= h(z) + K|x - y| + (h(y) - h(z)) \geq h(z) + K(|x - y| - |y - z|) \\ &\geq h(z) - K|x - z|) \end{aligned} \tag{2.36}$$

para todo $y \in \Omega$, así H está bien definido. En particular de (2.36) con $z = x$ tenemos $H(x) = h(x)$ para todo $x \in \Omega$. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, dado $\epsilon > 0$ existe $y \in \Omega$ tal que $H(x_1) \geq h(y) + |x_1 - y| - \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} H(x_2) - H(x_1) &\leq h(y) + K|x_2 - y| - [h(y) + K|x_1 - y| - \epsilon] \\ &= K(|x_2 - y| - |x_1 - y|) + \epsilon \leq K|x_2 - x_1| + \epsilon \end{aligned}$$

Similarmente $H(x_1) - H(x_2) \leq K|x_2 - x_1| + \epsilon$. Por tanto $|H(x_2) - H(x_1)| \leq K|x_1 - x_2|$.

Tomemos una bola tal que $\Omega \subset B$, entonces $H_{|_B} \in W^{1,\infty}(B)$ (Teorema C.5) en particular $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$. También $h \in W^{1,2}(\Omega)$. Así, existe una sucesión $h_k \in \widehat{C}^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que $h_k \to h$ en $W^{1,2}(\Omega)$. Note que $D_i(h_k u)$ es limitado en $W^{1,2}(\Omega)$, $h_k u \to hu$ en $L^2(\Omega)$ y $D_i(h_k u) = uD_i h_k + h_k D_i u \to uD_i h + hD_i u$ en $L^2(\Omega)$, luego del Teorema C.3 sigue $uh \in W^{1,2}(\Omega)$ y $D_i(hu) = uD_i h + hD_i u$. ∎

Sea $B[u, v]$ la forma bilinear auxiliar

$$B[u, v] := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} D_j u D_i v + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i D_i uv + \int_\Omega cuv.$$

Lema 2.5. *Asumamos que se cumple las condiciones (B_1) y (B_2). Entones existen constantes $\beta,\ \eta > 0$ tal que*
$$B[u,u] \geq \beta\|u\|^2_{1,2,\Omega} - \eta\|u\|^2_{2,\Omega} \tag{2.37}$$
para todo $u,\ v \in W^{1,2}_0(\Omega)$.

Demostración. En vista de la condición de elipticidad (B_1) tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i u D_j u \\
&= B[u,u] - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i D_i u u - \int_\Omega c u^2 \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{\infty,\Omega} \int_\Omega |\nabla u||u| + \|c\|_{\infty,\Omega} \int_\Omega u^2. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Cauchy, tenemos

$$\int_\Omega |\nabla u||u| \leq \epsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon}\int_\Omega u^2 \quad (\epsilon > 0).$$

Insertamos esta desigualdad en (2.38), y luego tomamos $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon(n\Lambda) < \frac{\lambda_0}{2},$$

donde Λ es la constante en (B_2). Así

$$\frac{\lambda_0}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq B[u,u] + \Lambda \int_\Omega u^2.$$

De la desigualdad de Poincaré tenemos $\|u\|_{2,\Omega} \leq C\|\nabla u\|_{2,\Omega}$. Sigue fácilmente que

$$B[u,v] \geq \beta\|u\|^2_{1,2,\Omega} - \eta\|u\|^2_{2,\Omega},$$

para constantes apropiadas $\beta > 0$ y $\eta > 0$. ■

Lema 2.6. *Asumamos que se cumple las condiciones (B_1), (B_2) y a_{ij} son Lipschitz continuas. Si para $u \in W^{1,2}(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$ se verifica*

$$B[\phi,u] = \int_\Omega \phi f, \quad \forall\ \varphi \in C^\infty_0(\Omega) \tag{2.39}$$

entonces, para $\Omega' \subset\subset \Omega$, $u \in W^{2,2}(\Omega')$ y

$$\|u\|_{2,2,\Omega'} \leq C(\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}) \tag{2.40}$$

donde C es una constante dependiendo sólamente de las condiciones (B_1), (B_2), Ω', Ω y de la condición de Lipschitz.

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $b_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ y $c = 0$. En efecto, si denotamos $\widehat{B}[\phi, u] = B[\phi, u] - \int_\Omega b_j D_j u\phi - \int_\Omega cu\phi$ entonces $\widehat{B}[\phi, u] = \int_\Omega \phi\widetilde{f}$, donde $\widetilde{f} = f - \sum_{j=1}^n b_j D_j u - cu$. Así la hipótesis del lema se verifica para $\widehat{B}$ cambiando f por $\widetilde{f}$.

Sea Ω_1, Ω_2 abiertos tales que $\Omega' \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ y $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\xi = 1$ en Ω_1, $\xi = 0$ fuera de Ω_2. Sea $v = \xi u$, $v^h(x) = (v(x^h) - v(x))/h$ donde $x^h = x + he_i$ para algún i fijado ($1 \leq i \leq n$). Entonces es fácil verificar que $v, v^h \in W_0^{1,2}(\Omega)$ si $0 < |h| < h_0$, donde $h_0 = \mathrm{dist}(\Omega_2, \partial\Omega)$.

Ahora en adelante C será una constante genérica, esto es, una constante que puede cambiar de valor mas depende de los mismos parámetros.

Afirmación. Para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$|B[\phi, v^h]| \leq C(\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega})\|\phi\|_{1,2,\Omega}. \tag{2.41}$$

En efecto, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$B[\phi, v^h] = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij} D_j\phi D_i(\xi u)^h.$$

Del Lema C.2 sigue que

$$\|(D_i\xi.u)^h\|_{2,\Omega} \leq \|D_i\xi.u\|_{1,2,\Omega}. \tag{2.42}$$

Por tanto, usando la regla de Leibniz y (2.42) obtenemos

$$B[\phi, v^h] = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(\xi D_i u)^h D_j\phi + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(D_i\xi u)^h D_j\phi$$

y

$$|B[\phi, v^h]| \leq \left|\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(\xi D_i u)^h D_j\phi\right| + C\|\phi\|_{1,2,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega} \tag{2.43}$$

donde C es una constante que depende sólamente de Λ (condición (B_2)). Usando

$$f(x)g^h(x) = (f(x)g(x))^h - f^h(x)g(x^h)$$

obtenemos que el primer término de lado derecho de (2.43) es igual a

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}(a_{ij}\xi D_i u)^h D_j\phi - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}(a_{ij}^h\xi(x^h)(D_i u)(x^h)D_j\phi\right|. \tag{2.44}$$

Usando la condición de Lipschitz de a_{ij} y el hecho que, para toda g con suporte en Ω_2,

$$\int_{\Omega}|g(x^h)|^2\,dx \leq \int_{\Omega}|g(x)|^2\,dx$$

tenemos $|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}(a_{ij}^h\xi(x^h)(D_i u)(x^h)D_j\phi| \leq C\|\phi\|_{1,2,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}$. Entonces de (2.43) obtenemos

$$|B[\phi, v^h]| \leq \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}(a_{ij}\xi D_i u)^h D_j\phi\right| + C\|\phi\|_{1,2,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}.$$

Usando $\int_{\mathbb{R}^n} fg^h = -\int_{\mathbb{R}^n} f^{-h}g$ (suporte de g es compacto) y que $\operatorname{supp}\,\xi \subset\subset \Omega$ tenemos

$$|B[\phi, v^h]| \leq \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\xi D_i u D_j\phi^{-h}\right| + C\|\phi\|_{1,2,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}. \tag{2.45}$$

Usando el Lema C.2 y la regla de Leibniz obtenemos que el primer término del lado derecho de (2.45) puede ser estimado por

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}D_i u D_j(\xi\phi^{-h})\right| + C\|\phi\|_{1,2,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}.$$

Así,

$$|B[\phi, v^h]| \leq |B[\xi\phi^{-h}, u]| + C\|\phi\|_{1,2,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}.$$

De la hipótesis (2.39), con ϕ substituido por $\xi\phi^{-h}$, y de $\|\xi\phi^{-h}\|_{2,\Omega} \leq C\|\phi\|_{1,2,\Omega}$ (Lema C.2) sigue (2.41). Esto prueba la afirmación.

Por densidad, (2.41) también vale para cada $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Tomando en (2.41) $\phi = v^h$, usando Lema 2.5 y el hecho que $\|v^h\|_{2,\Omega} \leq c\|u\|_{1,2,\Omega}$ (Lema C.2) sigue que

$$\begin{aligned}\|v^h\|_{1,2,\Omega}^2 &\leq C|B[v^h, v^h]| + C\|v^h\|_{2,\Omega}^2 \leq C(\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega})\|v^h\|_{1,2,\Omega} + C\|v^h\|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq C(\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_m)\|v^h\|_{1,2,\Omega}.\end{aligned}$$

Luego
$$\|v^h\|_{1,2,\Omega} \leq C(\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega}).$$

Sea $0 < |h| < \text{mín}\{h_0, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega_1)\}$. Entonces, si $x \in \Omega'$ tenemos que $x + he_1 \in \Omega_1$ y por tanto $v^h(x) = (\xi u)^h(x) = u^h(x)$. Luego

$$\|u^h\|_{1,2,\Omega'} \leq C(\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Omega})$$

y el resultado sigue del Lema C.3. ■

Lema 2.7. *Si $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ y $v \in L^2(\Omega)$ son tales que $B[\varphi, u] = \int_\Omega \varphi v$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $u \in C_0(\Omega)$ y Ω es limitado entonces tenemos que $\text{supp}(u-\epsilon)^+ \subset\subset \Omega$. Sea ω abierto tal que $\text{supp}(u-\epsilon)^+ \subset \omega \subset\subset \Omega$ entonces $(u-\epsilon)^+ \in W^{1,2}(\omega)$. Además, como $\text{supp}(u-\epsilon)^+$ es compacto, $(u-\epsilon)^+ \in W_0^{1,2}(\omega)$ (Teorema C.6). Luego $(u-\epsilon)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y

$$B[(u-\epsilon)^+, u] = \int_\Omega (u-\epsilon)^+ v \leq \|v\|_{2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega}. \tag{2.46}$$

Calculando

$$\begin{aligned}
B[(u-\epsilon)^+, u-(u-\epsilon)^+] &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij} D_j[u-(u-\epsilon)^+] D_i(u-\epsilon)^+ \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i D_i[u-(u-\epsilon)^+](u-\epsilon)^+ + \int_\Omega c[u-(u-\epsilon)^+](u-\epsilon)^+ \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{u>\epsilon} a_{ij}(D_j u - D_j u) D_i u \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{u>\epsilon} b_i (D_i u - D_i u)(u-\epsilon) + \int_{u>\epsilon} \epsilon c (u-\epsilon) \\
&= \int_\Omega \epsilon c (u-\epsilon)^+.
\end{aligned}$$

Así
$$B[(u-\epsilon)^+, u] = B[(u-\epsilon)^+, (u-\epsilon)^+] + \int_\Omega \epsilon c (u-\epsilon)^+.$$

Como $\int_\Omega \epsilon c(u-\epsilon)^+ \geq 0$, entonces $B[u, (u-\epsilon)^+] \geq B[(u-\epsilon)^+, (u-\epsilon)^+]$. De (2.37) y (2.46),

$$\begin{aligned}
\beta\|(u-\epsilon)^+\|_{1,2,\Omega}^2 &\leq B[u, (u-\epsilon)^+] + k\|(u-\epsilon)^+\|_{2,\Omega}^2 \\
&\leq \|v\|_{2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega} + k\|u\|_{2,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

Luego $\{(u-\epsilon)^+ : 0 < \epsilon < 1\}$ es limitado en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Como $W_0^{1,2}(\Omega)$ es reflexivo podemos encontrar una sucesión $\epsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ tal que $(u-\epsilon_n)^+$ converge débilmente en $W_0^{1,2}(\Omega)$ a $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces $(u-\epsilon_n)^+$ converge débilmente a v en $L^2(\Omega)$. Como $(u-\epsilon_n)^+ \to u^+$ en $L^2(\Omega)$ sigue que $u^+ = v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Análogamente tenemos $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$. ■

Teorema 2.10. *Asumamos que los coeficientes a_{ij} son globalmente Lipschitz continuos. Si Ω es Wiener regular, entonces para cada $f \in L^n(\Omega)$ existe um único $u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que*

$$\mathcal{A}u = f.$$

Demostración. Primero probaremos la existencia. Substituyamos el operador $\mathcal{A}$ por un operador en la forma divergente de la siguiente manera. Del Lema 2.4, podemos escribir $\widetilde{b}_j := b_j - \sum_{i=1}^n D_i a_{ij}$ con $\widetilde{b}_j \in L^\infty(\Omega)$, para $j = 1, \ldots, n$. Consideremos el operador elíptico $\mathcal{A}_d$ en la forma divergente dado por

$$\mathcal{A}_d u = -\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j u) + \sum_{j=1}^n \widetilde{b}_j D_j u + cu.$$

Del Teorema 2.1, dada $f \in L^n\Omega)$, existe una única solución $u \in C_0(\Omega) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}_d u = f$ en Ω débilmente, esto es,

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij} D_j u D_i v + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \widetilde{b}_j D_j u v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv \tag{2.47}$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Del Lema 2.7 tenemos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Luego del Lema 2.6, $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Como a_{ij} son Lipschitz continuas, del Lema 2.4 sigue que $a_{ij}D_j u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $D_i(a_{ij}D_j u) = D_i a_{ij} D_j u + a_{ij} D_{ij} u$. Entonces aplicando este hecho en (2.47) obtenemos $\mathcal{A}u = f$ c.t.p en Ω. Como $f \in L^n(\Omega)$ y $n > 1$ sigue del Teorema 2.3 que $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. La unicidad sigue del Teorema 2.2. ■

Lema 2.8. *a) Existen $\widetilde{a}_{ij} \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widetilde{a}_{ij} = a_{ij}$ y*

$$\sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \frac{\lambda_0}{2}|\xi|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

b) Existen $a_{ij}^k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $a_{ij}^k \to a_{ij}$ uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $k \to \infty$ y

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x)\xi_i\xi_j \geq \frac{\lambda_0}{2}|\xi|^2$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Seja $b_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una extensión continua y limitada de a_{ij}. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(x,\xi) = \sum_{i,j=1} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Denotemos $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ y consideremos el conjunto

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x,\xi) > \frac{\lambda_0}{2},\ \forall \xi \in S\}.$$

Note que Ω_1 es abierto, $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$ y $\varphi(x,\xi) \geq \frac{\lambda_0}{2}|\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega_1$. Luego, del Teorema de Partición de la Unidad, existen funciones $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_1(x) = 1$ en $\overline{\Omega}$ y $\varphi_2(x) = 1$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$.

Sea $\widetilde{a}_{ij} = \varphi_1 b_{ij} + \frac{\lambda_0}{2}\varphi_2\delta_{ij} \in C(\mathbb{R}^n)$ donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ caso contrario. Entonces, si $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j &= \varphi_1(x)\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\xi_i\xi_j + \frac{\lambda_0}{2}\varphi_2(x)\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\xi_i\xi_j \\ &= \varphi_1(x)\varphi(x,\xi) + \frac{\lambda_0}{2}\varphi_2(x)\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \\ &= \varphi_1(x)\varphi(x,\xi) + \frac{\lambda_0}{2}\varphi_2(x)|\xi|^2.\end{aligned}$$

De esta desigualdad, sabiendo que $\varphi_1 = 0$ en Ω_1^c y $\varphi \geq \frac{\lambda_0}{2}$ en $\Omega_1 \times S$, se concluye la parte a).

Sea $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regularizante. Entonces $a_{ij}^k = \widetilde{a}_{ij} * \rho_k = \rho_k * \widetilde{a}_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $a_{ij}^k \to a_{ij}$ uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $k \to \infty$. Si $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x)\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{a}_{ij}(x-y)\rho_k(y)\xi_i\xi_j\,dy \\ &= \int_{B_{1/i}(0)} \sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(x-y)\xi_i\xi_j\rho_k(y)\,dy\end{aligned}$$

$$\geq \frac{\lambda_0}{2}|\xi|^2 \int_{B_{1/i}(0)} \rho_k(y)\, dy = \frac{\lambda_0}{2}|\xi|^2. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.11. *Asumamos que Ω satisface la condición del cono exterior uniforme. Entonces para todo $f \in L^n(\Omega)$ existe un único $u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que*

$$\mathcal{A}u = f.$$

Demostración. Sea $a^k_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ como en el Lema 2.8 $b)$, note que podemos asumir que a^k_{ij} son globalmente Lipschitz. Sea $\mathcal{A}_k$ operador elíptico dado por

$$\mathcal{A}_k u = -\sum_{i,j=1}^{n} a^k_{ij} D_{ij} u + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j u + cu.$$

Note que a^k_{ij}, a_{ij}, b_j y c están limitados por una misma constante en $L^\infty(\Omega)$, a^k_{ij} y a_{ij} tienen un mismo módulo de continuidad. También $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_k$ tienen módulo de elipticidad $\lambda_0/2$.

Sea $f \in L^n(\Omega)$, del Lema 2.1 tenemos que Ω es Wiener regular, y del Teorema 2.10 para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um único $u_k \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}_k u_k = f$. Note que $u_k \in W^{1,2}(\Omega)$ (Lema2.7). Del Teorema 2.9, existe $C > 0$ (que no depende de k) tal que

$$\|u_k\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C(\|f\|_{n,\Omega} + \|u_k\|_{C(\Omega)}).$$

Como los coeficientes de primer orden de $\mathcal{A}_k$ son independientes de k, del Teorema 2.2 tenemos $\|u_k\|_{\infty,\Omega} \leq C_1 \|f\|_{n,\Omega}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y alguna constante $C_1 > 0$. Así $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es limitada en $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Sigue fácilmente que (u_k) es uniformemente equicontinua. Luego del Teorema de Arzelá-Ascoli, (u_k) converge uniformemente a $u \in C(\overline{\Omega})$ (pasando a una subsucesión). En particular $u \in C_0(\Omega)$.

Si $\Omega' \subset\subset \Omega$, del Teorema 2.4,

$$\|u_k\|_{2,n,\Omega'} \leq C(\|u_k\|_{n,\Omega} + \|f\|_{n,\Omega})$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y alguna constante C (independiente de k). Como $u_k \to u$ en $L^n(\Omega)$, entonces (u_k) es limitada en $W^{2,n}(\Omega')$. Por reflexividad, pasando a una subsucesión, existe un $v \in W^{2,n}(\Omega')$ tal que $u_k \rightharpoonup v$ débilmente en $W^{2,n}(\Omega')$. Esto implica que $u_k \rightharpoonup v$ en $L^n(\Omega')$, entonces $u = v \in W^{2,n}(\Omega')$. Como $u_k \rightharpoonup u$ en $W^{2,n}(\Omega')$, sigue que $D_{ij}u_k \rightharpoonup D_{ij}u$ en $L^n(\Omega')$. Además $\sup \|D_{ij}u_k\|_{n,\Omega'} < \infty$, entonces $(a^k_{ij} - a_{ij})D_{ij}u_k \to 0$ en $L^n(\Omega')$.

Podemos escribir

$$a_{ij}^k D_{ij}u_k - a_{ij}D_{ij}u = (a_{ij}^k - a_{ij})D_{ij}u_k + a_{ij}(D_{ij}u_k - D_{ij}u),$$

entonces $a_{ij}^k D_{ij}u_k \rightharpoonup a_{ij}D_{ij}u$ en Ω'. Así $\mathcal{A}_k u_k \rightharpoonup \mathcal{A}u$ en $L^n(\Omega')$, o sea, $\mathcal{A}u = f$ en Ω'. Como Ω' es arbitrario, $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\mathcal{A}u = f$. La unicidad sigue del Teorema 2.2. ■

2.3 El problema de Dirichlet

En esta sección mostraremos la equivalencia entre el problema de Poisson

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{P}$$

y el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{D}$$

donde $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ son dados y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Definimos el operador A en $L^n(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) : \mathcal{A}u \in L^n(\Omega)\}, \\ Au &:= \mathcal{A}u. \end{aligned}$$

Así el problema de Poisson (P) puede ser formulado de la siguiente forma, sobre que condiciones el operador A es invertible.

Observación 2.2. *Note que para $\mu \geq 0$ el operador $A + \mu$ tiene los mismos coeficientes de A excepto el coeficiente de orden 0 que son substituido por $c + \mu$.*

Lema 2.9. *Sea X espacio de Banach, Y un espacio normado y $L_0, L_1 : X \to Y$ operadores lineares limitados. Para cada $t \in [0, 1]$ sea*

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1$$

y suponga que existe C tal que

$$\|x\|_X \leq C\|L_t x\|_Y \tag{2.50}$$

para todo $t \in [0, 1]$. Entonces L_1 es sobreyectivo si y sólo si L_0 lo es.

Demostración. Suponga que L_s es sobreyectivo para algún $s \in [0,1]$. De (2.50), L_s es inyectivo, de ahí existe su inverso $L_s^{-1} : Y \to X$. Para $t \in [0,1]$ y $y \in Y$ fijo, la ecuación $L_t x = y$ equivalente a la ecuación

$$\begin{aligned} L_s(x) &= y + (L_s - L_t)x \\ &= y + (t-s)L_0 x - (t-s)L_1 x \end{aligned}$$

que también es equivalente a la ecuación

$$x = L_s^{-1} y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$$

La aplicación $T : X \to X$ dada por $Tx = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$ es una contracción si

$$|s-t| < \delta = [C(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1}.$$

Entonces L_t es sobreyectiva para todo $t \in [0,1]$ satisfaciendo $|s-t| < \delta$. Dividiendo el intervalo $[0,1]$ en subintervalos de longitud menor que δ, vemos que L_t es sobreyectiva para todo $t \in [0,1]$ sabiendo que es sobreyectiva para algún $t \in [0,1]$ fijo. En particular para $t = 0$ o $t = 1$. ■

Proposición 2.1. *El operador A es cerrado e inyectivo. Así, A será invertible si fuera sobreyectivo. Si $A + \mu_0$ fuera invertible para algún $\mu_0 \geq 0$ entonces $A + \mu$ será invertible para todo $\mu \geq 0$.*

Demostración. Como $Au + \mu u \in L^n(\Omega)$ para todo $u \in D(A)$, de la Observación 2.2 y del Teorema 2.2 , existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \leq C\|\mu u + Au\|_{n,\Omega} \tag{2.51}$$

para todo $u \in D(A)$ y $\mu \geq 0$.

Primero probemos que A es cerrado. Sea $u_k \in D(A)$ tal que $u_k \to u$ en $L^n(\Omega)$ y $Au_k \to f$ en $L^n(\Omega)$ cuando $k \to \infty$. De (2.51) tenemos

$$\|u_k - u_l\|_{\infty,\Omega} \leq C\left(\|\mu(u_k - u_l)\|_{n,\Omega} + \|Au_k - Au_l\|_{n,\Omega}\right)$$

Así (u_k) es de Cauchy en $C(\overline{\Omega})$, entonces existe $v \in C_0(\Omega)$ tal que $u_k \to v$ uniformemente. Sigue que $u = v$. Si $\Omega' \subset\subset \Omega$, del Teorema 2.4,

$$\|u_k\|_{2,n,\Omega'} \leq C(\|u_k\|_{n,\Omega} + \|Au_k\|_{n,\Omega}).$$

donde C es independiente de k. Así u_k es limitado en $W^{2,n}(\Omega')$. De manera análoga a la demostración del Teorema 2.11 tenemos que $u \in W^{2,n}(\Omega')$ y $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $W^{2,n}(\Omega')$ (pasando a una subsucesión). Por tanto $Au_k \rightharpoonup Au$ en $L^n(\Omega')$. Así por unicidad del límite $Au = f$ en Ω'. Como Ω' y arbitrario tenemos $u \in D(A)$ y $Au = f$.

La inyetividad de A sigue del Teorema 2.2. Si A es sobreyectivo, del hecho que A es cerrado y Teorema B.1, A es invertible .

Ahora asumamos que $\mu_1 + A$ es invertible para algún $\mu_1 \geq 0$. Si $\mu_2 \geq 0$, definimos $A(t) = t(\mu_1 + A) + (1-t)(\mu_2 + A) = t\mu_1 + (1-t)\mu_2 + A$ para $t \in [0,1]$. $A(0), A(1) \in \mathcal{L}(D(A), L^n(\Omega))$ donde $D(A)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|u\|_{D(A)} = \|u\|_{n,\Omega} + \|Au\|_{n,\Omega}$. De (2.51),

$$\begin{aligned} C\|A(t)u\|_{n,\Omega} &\geq \|u\|_{\infty,\Omega} \\ &\geq \frac{1}{|\Omega|^{1/n}}\|u\|_{n,\Omega} \end{aligned} \tag{2.52}$$

para todo $t \in [0,1]$. Usando (2.52),

$$\begin{aligned} \|u\|_{D(A)} &\leq \|u\|_{n,\Omega} + \|A(t)u\|_{n,\Omega} + \|(t\mu_1 + (1-t)\mu_2)u\|_{n,\Omega} \\ &\leq \|u\|_{n,\Omega} + \text{máx}\{\mu_1, \mu_2\}\|u\|_{n,\Omega} + \|A(t)u\|_{n,\Omega} \\ &\leq \left(C|\Omega|^{1/n}\left(\text{máx}\{\mu_1,\mu_2\} + 1\right) + 1\right)\|A(t)u\|_{n,\Omega}. \end{aligned}$$

Así $\|u\|_{D(A)} \leq C_1\|A(t)u\|_{n\Omega}$ para alguna C_1 y para todo $t \in [0,1]$. Luego, del Lema 2.9, $A(0)$ es sobreyectivo pues $A(1)$ es sobreyectivo. De (2.52) $A(0)$ es inyectivo, entonces $A(0)$ es biyectiva y por tanto invertible. ■

Definición 2.5. *Una función u es llamada $\mathcal{A}$-armónica si $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ para algún $p > 1$ y $\mathcal{A}u = 0$.*

Del Teorema 2.3 tenemos que cada función $\mathcal{A}$-armónica u está en $\bigcap_{p\geq 1} W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Definición 2.6. *a) Dado $g \in C(\partial\Omega)$, una solución del problema de Dirichlet* (D) *es una función $u \in C(\overline{\Omega})$, $\mathcal{A}$-armónica tal que $u_{|\partial\Omega} = g$.*

b) Diremos que Ω es $\mathcal{A}$-regular si para cada $g \in C(\partial\Omega)$ existe una solución del problema de Dirichlet (D).

La unicidad de la solución del problema de Dirichlet (D) sigue del siguiente lema.

Lema 2.10. *Sea $u \in C(\overline{\Omega})$ una función $\mathcal{A}$-armónica entonces*

$$-\|u^-\|_{C(\partial\Omega)} \leq u(x) \leq \|u^+\|_{C(\partial\Omega)} \tag{2.53}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. En particular

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|u\|_{C(\partial\Omega)}. \tag{2.54}$$

Demostración. Sea $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ con $\mathcal{A}u = 0$. Del Teorema 2.2 tenemos $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$ y $\sup_{\Omega}(-u) \leq \sup_{\partial\Omega}(-u)^+$. Así $u(x) \leq \|u^+\|_{C(\partial\Omega)}$ y $-u(x) \leq \|(-u)^+\|_{C(\partial\Omega)}$ para $x \in \Omega$. Como $(-u)^+ = u^-$, entonces sigue (2.53). ∎

Teorema 2.12. *El operador A es invertible si y sólo si Ω es $\mathcal{A}$-regular.*

Demostración. Asumamos que A es invertible.

Caso 1. Sea $g \in C(\partial\Omega)$ tal que $g = G_{|\partial\Omega}$ donde $G \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces $\mathcal{A}G \in L^n(\Omega)$ y si $v = A^{-1}(\mathcal{A}G)$, tenemos que $u = G - v$ satisface $\mathcal{A}u = 0$ y $u_{|\partial\Omega} = g$.

Caso 2. Sea $g \in C(\partial\Omega)$ arbitrario. Si $\widetilde{g}$ es una extensión continua de g a $\mathbb{R}^n$, tomando una sucesión regularizante (ρ_k) tenemos $g_k = \rho_k * \widetilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, en particular $g_k \in C(\partial\Omega)$ y además $\lim_{k\to\infty} g_k = g$ uniformemente en $\partial\Omega$. Sea $u_k \in C(\overline{\Omega})$ funciones $\mathcal{A}$-armónica satisfaciendo $u_{k|\partial\Omega} = g_k$ (Caso 1). De (2.54),

$$\|u_k - u_l\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|g_k - g_l\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Así (u_k) es de Cauchy en $C(\overline{\Omega})$, luego existe un $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $\lim_{k\to\infty} u_k = u$ uniformemente en $\overline{\Omega}$. En particular, $u_{|\partial\Omega} = g$. Si $\Omega' \subset\subset \Omega$, del Teorema 2.4

$$\|u_k\|_{2,n,\Omega'} \leq C\|u_k\|_{n,\Omega}.$$

Así u_k es limitado en $W^{2,n}(\Omega')$. Sigue, como en la prueba del Teorema 2.11, $u \in W^{2,n}(\Omega')$ y $u_k \rightharpoonup u$ en $W^{2,n}(\Omega')$. Así $\mathcal{A}u_k \rightharpoonup \mathcal{A}u$ en $L^n(\Omega')$ de donde $\mathcal{A}u = 0$ en Ω'. Como Ω' es arbitrario, entonces $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $\mathcal{A}u = 0$ en Ω.

Recíprocamente, asumamos que Ω es $\mathcal{A}$-regular. Sea $f \in L^n(\Omega)$, B es una bola tal que $\overline{\Omega} \subset B$, $\widetilde{a}_{ij}$ la extensión de a_{ij} obtenida en el Lema 2.8 y $\widetilde{f}$, $\widetilde{b}_j$, $\widetilde{c}$ la extensión de f, b_j, c por 0 fuera de Ω. Considerando el operador $\widetilde{\mathcal{A}}v = -\sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{ij} D_{ij} v + \sum_{j=1}^n \widetilde{b}_j D_j v + \widetilde{c}v$, del Teorema 2.11 existe un $v \in C_0(B) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(B)$ tal que $\widetilde{\mathcal{A}}v = \widetilde{f}$. Si $g = v_{|\partial\Omega}$ entonces, de la hipótesis, existe una función $\mathcal{A}$-armónica $w \in C(\overline{\Omega})$ tal que $w_{|\partial\Omega} = g$. Tomando $u = v - w$ sigue $u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$, $\mathcal{A}u = f$ en Ω y $u_{|\partial\Omega} = 0$, esto es, $u \in D(A)$ y $Au = f$. ∎

Corolario 2.1. *Asumamos que una de las siguientes condiciones están satisfechas*

a) *Ω es Wiener regular y los coeficientes a_{ij} son globalmente Lipschitz continuo, o*

b) *Ω satisface la condición del cono exterior uniforme.*

Entonces Ω es $\mathcal{A}$-regular. Más generalmente, para todo $f \in L^n(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$ existe un único $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfaciendo

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f \\ u_{|\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

Demostración. De la Proposición 2.51, Teorema 2.10 (para a)) y Teorema 2.11 (para b)) tenemos que A es invertible. Así, del Teorema 2.12, Ω es $\mathcal{A}$-regular. Sea $f \in L^n(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$, como Ω es $\mathcal{A}$-regular , existe una función $\mathcal{A}$-armónica $u_1 \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u_{|\partial\Omega} = g$. Como A es invertible, existe una función $u_0 \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}u_0 = f$. Tomando $u = u_0 + u_1$, entonces $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$, $\mathcal{A}u = f$ y $u_{|\partial\Omega} = g$. La unicidad sigue del Teorema 2.2. ■

Observación 2.3. *Para el caso en que $\mathcal{A} = \Delta$, Δ-regularidad es la regularidad usual de Ω con respecto al problema de Dirichlet clásico, esto es, Ω es Δ-regular si sólo si Ω es Wiener regular (Dirichlet regular). Este hecho sigue del Lema de Weyl* [1].

2.4 Generación de semigrupo

En esta sección consideraremos la parte A_c y A_0 de A en $C(\overline{\Omega})$ y $C_0(\Omega)$ como sigue

$$\begin{aligned} D(A_c) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) : \mathcal{A}u \in C(\overline{\Omega})\}, \\ A_c u &= \mathcal{A}u, \\ D(A_0) &= \{u \in C_0(\Omega) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) : \mathcal{A}u \in C_0(\Omega)\}, \\ A_0 u &= \mathcal{A}u. \end{aligned}$$

Así A_c es la parte de A en $C(\overline{\Omega})$ y A_0 es la parte de A_c en $C_0(\Omega)$.

Lema 2.11. *Sea $B \subset \Omega$ una bola de centro en x_0 y $u \in W^{2,p}(B)$ con $p > n$ una función compleja tal que $\mathcal{A}u \in C(B)$. Si $|u(x_0)| \geq |u(x)|$ para todo $x \in B$, entonces*

$$\mathrm{Re}[\overline{u(x_0)}(\mathcal{A}u)(x_0)] \geq 0.$$

Demostración. Asumamos que $x_0 = 0$. Tenemos $W^{2,p}(B) \hookrightarrow C^1(B)$ (Teorema C.9). Supongamos que la afirmación sea falsa, entonces por continuidad existe un $\epsilon > 0$ y una bola $B_l \subset B$ tal que $\mathrm{Re}[\overline{u(x)}(\mathcal{A}u)(x)] \leq -\epsilon$ en B_l.

[1] Vea [21], Teorema 1.16.

Afirmamos que $|u|^2 \in W^{2,p}(B_l)$. En efecto, existe una sucesión $u_k \in \widehat{C}^{2,p}(B_l) \cap C_B^2(B_l)$ tal que $u_k \to u$ en $W^{2,p}(B_l)$. Entonces $(u_k\overline{u})$ es limitado en $W^{2,p}(B_l)$ y $u_k\overline{u} \to u\overline{u}$ en $L^p(B_l)$. Además, $D_i(u_k\overline{u})$ y $D_{ij}(u_k\overline{u})$ convergen para $D_iu\overline{u} + uD_i\overline{u}$ y $D_{ij}u\overline{u} + D_iuD_j\overline{u} + D_juD_i\overline{u} + uD_{ij}\overline{u}$ en $L^p(\Omega)$, respectivamente. Entonces, del Teorema C.3, $u\overline{u} \in W^{2,p}(B_l)$ y $D_i(u\overline{u}) = 2\operatorname{Re}[D_iu\overline{u}]$, $D_{ij}(u\overline{u}) = 2\operatorname{Re}[D_{ij}u\overline{u} + D_iuD_j\overline{u}]$.

Por condición de elipticidad, $\operatorname{Re}\sum_{i,j} a_{ij}D_iu\overline{D_ju} \geq 0$. Luego, en B_l

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}|u|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} -a_{ij}D_{ij}|u|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_jD_j|u|^2 + c|u|^2 \\
&= 2\operatorname{Re}\left[\sum_{i,j=1}^{n} -a_{ij}D_{ij}u\overline{u} + \sum_{j=1}^{n} b_jD_ju\overline{u} + c|u|^2\right] - 2\operatorname{Re}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}u\overline{u}\right] - c|u|^2 \\
&\leq 2\operatorname{Re}[\mathcal{A}u\overline{u}] \leq -2\epsilon.
\end{aligned}$$

Sea $\psi(x) = |u|^2 - \tau|x|^2$, $\tau > 0$ y $c_1 = \operatorname{ínf}_{B_l}\mathcal{A}|x|^2$, entonces $\mathcal{A}\psi = \mathcal{A}|u|^2 - \tau\mathcal{A}|x|^2 \leq -2\epsilon - \tau c_1$ en B_l para todo $\tau > 0$. Escogiendo τ suficientemente pequeño tenemos que $\mathcal{A}\psi \leq -\epsilon$ en B_l. Como $\psi \in W^{2,n}(B_l) \cap C(\overline{B_l})$, del Teorema 2.2, sigue que

$$\begin{aligned}
|u(0)|^2 = \psi(0) &\leq \sup_{\partial B_l}\psi^+ = \sup_{\partial B_l}(|u|^2 - \tau l^2)^+ \\
&\leq |u(0)|^2 - \tau l^2 < |u(0)|^2,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. ■

Proposición 2.2 (Principio Máximo Complexo). *Sea* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *tal que* $\lambda u + \mathcal{A}u = 0$ *donde* $\operatorname{Re}\lambda > 0$. *Si existe* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $|u(x)| \leq |u(x_0)|$ *para todo* $x \in \Omega$, *entonces* $u \equiv 0$. *Consecuentemente,*

$$\operatorname{máx}_{\overline{\Omega}}|u(x)| = \operatorname{máx}_{\partial\Omega}|u(x)|.$$

Demostración. Note que $\operatorname{Re}\mathcal{A}u = \mathcal{A}\operatorname{Re}u$. Como $\lambda u = -\mathcal{A}u$ sigue que $\mathcal{A}\operatorname{Re}u \in C(\Omega)$. Del Teorema 2.3, $\operatorname{Re}u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ para cualquier $p > n$. Análogamente $\operatorname{Im}u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Entonces $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $p > n$. Del lema anterior $\operatorname{Re}[\overline{u(x_0)}\mathcal{A}u(x_0)] \geq 0$. Pero

$$\operatorname{Re}[\overline{u(x_0)}\mathcal{A}u(x_0)] = -\operatorname{Re}\lambda|u(x_0)|^2 \leq 0.$$

Entonces $u(x_0) = 0$. Por tanto $u \equiv 0$. ■

Proposición 2.3. *Asumamos que* Ω *es* $\mathcal{A}$*-regular.*

i) $\rho(-A_c) \supset (0,\infty)$ *y*

$$\lambda\|(\lambda + A_c)^{-1}\|_{\mathcal{L}(C(\overline{\Omega}))} \leq 1, \quad \forall\,\lambda > 0.$$

ii) $-A_c$ *tiene resolvente positivo con* $w = 0$ *(Definición 1.10).*

Demostración. Sea $\lambda > 0$, de la Proposición 2.1 y Teorema 2.12 tenemos que $\lambda + A$ es biyectivo, entonces $\lambda + A_c$ también es biyectivo.

a) Primero mostraremos que si $f \in C(\overline{\Omega})$, $f \leq 0$ y $u = (\lambda + A_c)^{-1} f$, entonces $u \leq 0$. Asumamos que $u^+ \neq 0$. Como $u \in C_0(\Omega)$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_\Omega u > 0$. Del Lema 2.11, $\mathcal{A}u(x_0) \geq 0$. Como $\lambda u + \mathcal{A}u = f$ sigue que $\lambda u(x_0) \leq f(x_0) \leq 0$, lo que es una contradicción.

$b)$ Sea $f \in C(\overline{\Omega})$, $u = (\lambda + A_c)^{-1} f$. Vamos mostrar que $\|\lambda u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}$. Asumamos primeramente que $f \geq 0$, $f \neq 0$. De $a)$ $u \geq 0$ y $u \neq 0$. Sea $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \|u\|_{C(\overline{\Omega}}$. Entonces $\mathcal{A}u(x_0) \geq 0$ (Lema 2.11). Luego $\lambda u(x_0) \leq \lambda u(x_0) + A_c u(x_0) = f(x_0) \leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}$. Si $f \in C(\overline{\Omega})$ es arbitrario,

$$\begin{aligned}
\lambda |(\lambda + A_c)^{-1} f(x)| &\leq \lambda(\lambda + A_c)^{-1} f^+(x) + \lambda(\lambda + A_c)^{-1} f^-(x) \\
&= \lambda(\lambda + A_c)^{-1} |f|(x) \\
&\leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. De ahí $\lambda \|(\lambda + A_c)^{-1} f\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C(\overline{\Omega})}$.

Por tanto, i y $ii)$ siguen de $a)$ y $b)$. ∎

El siguiente teorema es demostrado en [7], Teorema 3.1.7.

Teorema 2.13. *Sea* a'_{ij}, b'_j, $c' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones uniformemente continuas en* $\mathbb{R}^n$ *y limitadas. Sea el operador fuertemente elíptico*

$$\begin{aligned}
D(A_\infty) &= \{u \in \cap_{p \geq 1} W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : u, A_\infty u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\} \\
A_\infty u &= -\sum_{i,j=1}^n a'_{ij} D_{ij} u + \sum_{j=1}^n b'_j D_j u + c' u.
\end{aligned}$$

Entonces $A_\infty : D(A_\infty) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es sectorial.*

Del Lema 2.8 extendemos los coeficientes a_{ij} (manteniendo la misma notación) de manera uniformemente continua y limitada a $\mathbb{R}^n$ y satisfaciendo la condición de elipticidad

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \frac{\lambda_0}{2} |\xi|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. También extendemos b_j, c a funciones limitadas en $\mathbb{R}^n$ tal que $c \geq 0$ (mantenemos la misma notación). Ahora definimos el operador B_∞ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

por

$$D(B_\infty) = \{u \in \cap_{p\geq 1} W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : u, Bu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$
$$B_\infty u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{j=1}^{n} b_j D_j u + cu.$$

Cuando $b_j = c = 0$, definimos B^0_∞ análogamente a lo anterior.

Lema 2.12. *Sea X, Y, Z espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ y $\|\cdot\|_Z$, respectivamente. Asuma que $X \subset Y$ con inmersión compacta y $Y \subset Z$ con inmersión continua. Entonces*

$$\forall \epsilon > 0, \text{ existe } C_\epsilon \text{ satisfaciendo } \|u\|_Y \leq \epsilon \|u\|_X + C_\epsilon \|u\|_Z \quad \forall u \in X.$$

Demostración. Por el absurdo, existe $\epsilon > 0$ y una sucesión (u_k) en X con $u_k \neq 0$ tal que $\|u_k\|_Y > \epsilon \|u_k\|_X + k\|u_k\|_Z$. Tomando $v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_X}$ tenemos

$$\|v_k\|_Y > \epsilon + k\|v_k\|_Z. \tag{2.55}$$

Como $X \subset Y$ con inmersión compacta entonces existe $v \in Y$ con $v \neq 0$ tal que $v_k \to v$ en Y (pasando para una subsucesión). De la inmersión continua $Y \subset Z$, dividiendo (2.55) por k y tomando límite obtenemos que $0 \geq \|v\|_Z$. Esto es absurdo. ∎

Lema 2.13. *$D(B^0_\infty) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y, para cada $\epsilon > 0$ existe C_ϵ tal que*

$$\|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} \leq \epsilon \|B^0_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + C_\epsilon \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}, \quad \forall\, u \in D(B^0_\infty).$$

Demostración. Consideremos una bola arbitraria B_R en $\mathbb{R}^n$ de radio R y la bola B_{2R} de radio $2R$ con mismo centro. Para $p > n$ la inmersión $W^{2,p}(B_R)$ en $C^1(\overline{B}_R)$ es compacta (Teorema C.11). Del Teorema 2.4

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,p,B_R} &\leq C(\|B^0_\infty u\|_{p,B_{2R}} + \|u\|_{p,B_{2R}}) \\
&\leq C|B_{2R}|^{1/p}(\|B^0_\infty u\|_{\infty,B_{2R}} + \|u\|_{\infty,B_{2R}}) \\
&\leq C|B_{2R}|^{1/p}(\|B^0_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Del Lema 2.12, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^1(\overline{B}_R)} \leq \frac{\epsilon}{C|B_{2R}|^{1/p}} \|u\|_{2,p,B_R} + C_\epsilon \|u\|_{\infty,B_R}. \tag{2.57}$$

De (2.56) y (2.57)

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^1(\overline{B}_R)} &\leq \epsilon(\|B_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}) + C_\epsilon\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}\\ &= \epsilon\|B_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + (C_\epsilon + \epsilon)\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

Luego tenemos que $D_i u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} \leq \epsilon\|B^0_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + (\epsilon + C_\epsilon)\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n}. \qquad \blacksquare$$

Observación 2.4. *El lema anterior también es válido para* B_∞.

Teorema 2.14. *Existe* $M > 0$, $r > 0$ *tal que* $(\lambda + B_\infty)$ *es invertible y*

$$\|\lambda(\lambda + B_\infty)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}^n))} \leq M$$

para todo $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $|\lambda| > r$.

Demostración. Afirmamos que $D(B^0_\infty) = D(B_\infty)$. En efecto, si $u \in D(B^0_\infty)$, como $b_{ij}, c \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ luego $B_\infty u = B^0_\infty u + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + cu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, así $u \in D(B_\infty)$. La otra inclusión es análoga.
Luego

$$\begin{aligned}\|(B_\infty u - B^0_\infty u)\|_{\infty,\mathbb{R}^n} &\leq \sum_{j=1}^n \|b_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} + \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n}\\ &= C\|u\|_{1,\infty,\mathbb{R}^n} \qquad (2.58)\end{aligned}$$

donde $C = \sum_{j=1}^n \|b_j\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|c\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$. Del Lema 2.13 y de (2.58), dado $\epsilon > 0$ existe un $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\|(B_\infty - B^0_\infty)u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq \epsilon\|B^0_\infty u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + C_\epsilon\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \qquad (2.59)$$

para todo $u \in D(B^0_\infty)$. Como B^0_∞ es sectorial, él genera un semigrupo holomorfo. Entonces, de (2.59) y de Teorema 1.16, B_∞ genera un semigrupo holomorfo. Por tanto, del Corolario 1.7, existe $M > 0$ y $r > 0$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} > 0,\ |\lambda| > r\} \subset \rho(-B_\infty)$ y

$$\|\lambda(\lambda + B_\infty)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}^n))} < M, \quad \forall \operatorname{Re}\lambda > 0,\ |\lambda| > r. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.15. *Asumamos que* Ω *que es* $\mathcal{A}$*-regular. Entonces* $-A_c$ *genera un semigrupo holomorfo limitado* T *en* $C(\overline{\Omega})$. *El operador* $-A_0$ *genera un* C_0*-semigrupo holomorfo limitado* T_0 *en* $C_0(\Omega)$. *Más aún,*

$$T_0(t) = T(t)_{|C_0(\Omega)}.$$

Demostración. Sea $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $|\lambda| > r$ donde r es dado por el teorema anterior. Como $-A_c$ tiene resolvente positivo entonces, de la Proposición 1.5, $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(-A_c)$. Dado $f \in C(\overline{\Omega})$, existe $u \in C_0(\Omega) \cap \bigcap_{p\geq 1} W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\lambda u + \mathcal{A}u = f$$

Extendiendo f por 0 a $\mathbb{R}^n$ y tomando $v = (\lambda + B_\infty)^{-1} f$ sigue $\lambda v + \mathcal{A}v = f$ en Ω y del Teorema 2.14

$$\|\lambda v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|\lambda v\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq M\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = M\|f\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Más aún, $w = v - u \in C(\overline{\Omega}) \cap \bigcap_{p\geq 1} W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, $\lambda w + \mathcal{A}w = 0$ y $w(z) = v(z)$ en $\partial\Omega$. Luego del Principio del Máximo Complejo (Proposición 2.2)

$$\|w\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{\partial\Omega} |v(z)| \leq \frac{M}{|\lambda|}\|f\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\overline{\Omega})} &= \|u - v + v\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq \|w\|_{C(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq \frac{2M}{|\lambda|}\|f\|_{C(\overline{\Omega})}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

esto es, $\|R(\lambda, -A_c)\| \leq \frac{2M}{|\lambda|}$ para $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $|\lambda| > r$.
Note que A_c es invertible y $A_c^{-1} \geq 0$ (Lema 2.11). Entonces, de la Proposición 1.5, $s(-A_c) < 0$. Así existe un $\epsilon > 0$ tal que $s(-A_c) < -\epsilon < 0$ y $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\epsilon\} \subset \rho(-A_c)$. Luego

$$\sup_{|\lambda|\leq r,\, \operatorname{Re}\lambda>0} \|\lambda(\lambda + A_c)^{-1}\| < \infty. \tag{2.61}$$

Por tanto, de (2.60) y (2.61)

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda>0} \|\lambda(\lambda + A_c)^{-1}\| < \infty. \tag{2.62}$$

Entonces, del Teorema 1.14, A_c genera un semigrupo holomorfo limitado T en $C(\overline{\Omega})$. Como $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{C(\overline{\Omega})} = C_0(\Omega)$ y $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_c) \subset C_0(\Omega)$, entonces $\overline{D(A_c)} = C_0(\Omega)$. Además, la parte de A_c en $C_0(\Omega)$ es A_0. Por tanto, del Teorema 1.15, A_0 genera un C_0-semigrupo holomorfo T_0 tal que $T_0(t) = T(t)_{|C_0(\Omega)}$. ■

Como consecuencia del Teorema 2.15 y Corolario 1.8 tenemos:

Corolario 2.2. *Sea* $u_0 \in C_0(\Omega)$*, entonces existe una única función* $u(t,x) : [0,\infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *satisfaciendo*

$$\begin{cases} \quad u_t = \mathcal{A}u \quad t > 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \\ u(t,x) = 0 \quad x \in \partial\Omega,\, t > 0 \end{cases}$$

donde $u \in C^{\infty}\left((0,\infty), C_0(\Omega)\right) \cap C([0,\infty), C_0(\Omega)) \cap C((0,\infty), D(A_0))$.

Apéndice

$\mathcal{A}$

Funciones holomorfas de valor vectorial

Sea X un espacio de Banach y $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Una funcion $f : \Omega \to X$ es holomorfa si

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

existe para todo $z_0 \in \Omega$.

Si f es holomorfa, entonces f es continua y débilmente holomorfa (esto es, $x^* \circ f$ es holomorfa para todo $x^* \in X^*$). Si $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ es un camino finito, regular por partes, podemos formar la integral de línea $\int_\Gamma f(z)\,dz$ que coincide con la integral de Bochner $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$. Como

$$\left\langle x^*, \int_\Gamma f(z)\,dz \right\rangle = \int_\Gamma \langle x^*, f(z)\,dz\rangle,$$

muchas propiedades de funciones holomorfas e integrales de línea pueden ser extendidas del caso escalar al vectorial, aplicando el Teorema de Hahn-Banach. Por ejemplo, el teorema de Cauchy y el teorema de Residuo.

Teorema A.1 (Teorema de Identidad para funciones holomorfas)**.** *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Banach X. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f : \Omega \to X$ holomorfa. Asumamos que exista un sucesión convergente $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n \in \Omega$ y $f(z_n) \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f(z) \in Y$ para todo $z \in \Omega$.*

Una función $f : \Omega \to X$ es localmente limitada si $\sup_K \|f(z)\| < \infty$ para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$.

Teorema A.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $X = \mathcal{L}(Y, Z)$, donde Y y Z son espacios de Banach, y $f : \Omega \to X$ localmente limitada, entonces son equivalentes:*

(i) f *es holomorfo.*

(ii) $f(\cdot)y$ *es holomorfo para todo* $y \in Y$.

(iii) $\langle z^*, f(\cdot)y\rangle$ *es holomorfo para todo* $y \in Y$, $z^* \in Z^*$.

Teorema A.3 (Teorema de Vitali). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto y conexo. Sea* $f_n : \Omega \to X$ *holomorfa tal que*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ z\in B(z_0,r)}} \|f_n(z)\| < \infty$$

donde $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$. *Asumamos que el conjunto*

$$\Omega_0 := \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f(z_n) \text{ existe}\}$$

tiene un punto límite en Ω. *Entonces existe una función holomorfa* $f : \Omega \to X$ *ta que*

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z)$$

uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

Apéndice

$\mathcal{B}$

Operador cerrado

Sea X un espacio de Banach complejo. Un operador lineal en X es una aplicación lineal $A : D(A) \subset X \to X$ donde $D(A)$ es un subespaço lineal de X.

El operador lineal A es densamente definido si $\overline{D(A)} = X$, y es cerrado si su gráfico $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ es cerrado en $X \times X$. Así A es cerrado, si y sólamente si, $(x_n) \subset D(A)$ $x, y \in X$ tal que $x_n \to x$ $Ax_n \to y$ entonces $x \in D(A)$ y $Ax = y$. Es inmediato de esto que si A es cerrado y $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq 0$, entonce el operador $\lambda A + \beta$ con $D(\lambda A + \beta) = D(A)$ es cerrado.

Para un operador lineal A, $D(A)$ es un espacio normado con la norma de la gráfica

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|.$$

A es siempre limitado con respecto a norma de la gráfica. Entonces A es cerrado, si y sólo si, $D(A)$ es un espacio de Banach con la norma de la gráfica.

Definición B.1. *Un operador $A : D(A) \subset X \to X$ es* invertible *si A es bijetivo y $A^{-1} : X \to D(A)$ es limitado.*

Teorema B.1 ([2], Proposición B.1). *Sea A un operador lineal en X, son equivalentes*

1. *A es invertible.*

2. $\operatorname{Ran} A = X$ *y existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|Ax\| \geq \delta\|x\|$.

3. *A es cerrado,* $\operatorname{Ran} A = X$ *y* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Definición B.2. *Sea A un operador lineal. Definimos el* conjunto resolvente *de A como*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ es invertible }\}$$

Si $\rho(A) \neq \emptyset$ *entonces* A *es cerrado. Si* $\lambda \in \rho(A)$ *el operador* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *es llamado* resolvente . *También definimos el* espectro *de* A *como*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Teorema B.2 ([2], Corolario B.3). *Para cualquier operador lineal* A*,* $\rho(A)$ *es abierto. Más aún, si* $\mu \in \rho(A)$*,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $|\lambda - \mu| < \|R(\mu, A)\|^{-1}$*, entonces* $\lambda \in \rho(A)$ *y*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1},$$

donde la serie es convergente en norma. Además,

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{\|R(\mu, A)\|}{1 - |\mu - \lambda| \|R(\mu, A)\|}.$$

Más aún, $R(\cdot, A)$ *es holomorfo en* $\rho(A)$ *con valores en* $\mathcal{L}(X)$ *y*

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n R(\lambda, A)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema B.3 ([2], Proposición B.4). *Sea* A *un operador lineal en* X*,* $\lambda, \mu \in \rho(A)$*. Entonces*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

Teorema B.4 ([2], Proposición B.5). *Sea* A *un operador lineal en* X *y* U *un subconjunto abierto conexo de* $\mathbb{C}$*. Suponga que* $U \cap \rho(A)$ *sea no vacío y que exista una función holomorfa* $F : U \to \mathcal{L}(X)$ *tal que* $\{\lambda \in U \cap \rho(A) : F(\lambda) = R(\lambda, A)\}$ *tiene un punto de acumulación en* U*. Entonces* $U \subset \rho(A)$ *y* $F(\lambda) = R(\lambda, A)$ *para todo* $\lambda \in U$*.*

Definición B.3. *Una función* $R : U \to \mathcal{L}(X)$ *definido en un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{C}$ *se dice pseudo-resolvente si satisface la ecuación del resolvente, esto es,*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu) \quad (\lambda, \mu \in U).$$

Teorema B.5 ([2], Proposición B.6). *Sea* $R : U \to \mathcal{L}(X)$ *un pseudo-resolvente. Entonces*

a) $\operatorname{Ker} R(\lambda)$ *y* $\operatorname{Ran} R(\lambda)$ *son independientes de* $\lambda \in U$*.*

b) Existe un operador A *en* X *tal que* $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ *para todo* $\lambda \in U$*, si y sólo si,* $\operatorname{Ker} R(\lambda) = \{0\}$*.*

Apéndice
C

Espacio de Sobolev

En este apéndice, todas las funciones son funciones a valores reales.

Definición y propiedades

Definición C.1. *Sea $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y α un multi-índice. Diremos que v es la α-esima derivada débil de u, escribimos $D^\alpha u = v$, si*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, dx, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{C.1}$$

Definición C.2. *El espacio de Sobolev es definido como*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \forall\, \alpha,\ |\alpha| \leq k \text{ existe } D^\alpha u \text{ y } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

donde k es un entero no negativo y $1 \leq p \leq \infty$.

En este espacio introducimos la norma

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \begin{cases} \{\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \{\sum_{|\alpha|\leq k} \sup_\Omega |D^\alpha u|\}, & p = \infty \end{cases}$$

Así, $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para cualquier $1 \leq p \leq \infty$, reflexivo si $1 < p < \infty$, y separable si $1 \leq p < \infty$.

También definimos el espacio $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ como

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) := \{u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) : \forall\, \alpha\, |\alpha| \leq k \text{ existe } D^\alpha u \text{ y pertenece a } L^p_{\text{loc}}(\Omega)\}.$$

Teorema C.1 (Regla de Leibniz). *Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $v \in C_B^k(\Omega)$ entonces $uv \in W^{k,p}(\Omega)$ y*

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta v D^{\alpha-\beta} u, \quad (0 \leq |\alpha| \leq k)$$

Teorema C.2 ([12], Teorema 6.3). *Si definimos el espacio*

$$\widehat{C}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega) : \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty),$$

entonces $\widehat{C}^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema C.3 ([12], Lema 6.2). *Sea $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ y $(u_i) \subset W^{k,p}(\Omega)$ limitada en $W^{k,p}(\Omega)$ y converge débilmente a $u \in L^p(\Omega)$. Entonces $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y , para α, $0 \leq |\alpha| \leq k$, $(D^\alpha u_i)$ converge débilmente a $D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$.*

Teorema C.4 ([5], §5 Ejercicio 17). *Asuma que $1 < p < \infty$ y Ω es limitado. Entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ y*

$$D_i u^+ = \begin{cases} D_i u & \text{c.t.p en } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{c.t.p en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$D_i u^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p en } \{u \geq 0\}, \\ -D_i u & \text{c.t.p en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Teorema C.5 ([5], pag 279). *Sea Ω un abierto limitado con $\partial\Omega$ de classe C^1. Entonces $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua, si y sólo si, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

El espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$

Sea $1 \leq p < \infty$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ denota la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma de $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema C.6 ([10], Lema 9.5). *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ y Suponga que* $\operatorname{supp} u$ *es un subconjunto compacto de Ω. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema C.7 ([10], Teorema 9.17). *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $1 \leq p < \infty$. Si $u = 0$ en $\partial\Omega$ entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Desigualdades de cálculo

Para $1 \leq p < \infty$, y enteros $0 \leq j \leq k$, definimos el funcional $|\cdot|_{j,p,\Omega}$ en $W^{k,p}(\Omega)$ por

$$|u|_{j,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

Decimos que Ω satisface la *condición del cono* si existe un cono finito V tal que cada $x \in \Omega$ es el vértice de un cono finito V_x contenido en Ω y congruente a V. Cualquier dominio Ω de clase C^1 satisface a condición del cono.

Teorema C.8 ([12], Teorema 8.1). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio satisfaciendo la condición del cono. Para cada $\epsilon_0 > 0$, existe una constante C, dependiendo de p, k, n y las dimensiones del cono, tal que*

$$|u|_{j,p,\Omega} \leq \epsilon |u|_{k,p,\Omega} + \frac{C}{\epsilon^{j/(k-j)}} |u|_{0,p,\Omega} \quad (j < k)$$

o equivalentemente

$$|u|^p_{j,p,\Omega} \leq \epsilon |u|^p_{k,p,\Omega} + \frac{C}{\epsilon^{j/(k-j)}} |u|^p_{0,p,\Omega} \quad (j < k),$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $j < k$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Teoremas de inmersión

Teorema C.9 ([4], Teorema 4.12). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domino de clase C^1. Sea $j \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros y $1 \leq p < \infty$.*

1. *Si $mp < n$, entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad \text{para } p \leq q \leq p^* = np/(n - mp).$$

2. *Si $mp = n$, entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad \text{para } p \leq q < \infty.$$

3. *Si $mp > n$, entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega) \quad \text{para } p \leq q \leq \infty.$$

Más aún
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

Teorema C.10 ([12], Teorema 11.2)**.** *Sea Ω un dominio limitado con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $1 \leq r < \infty$. Sea $j, m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq j < m$. Si $1 \leq p < \infty$ satisface*
$$\frac{1}{p} > \frac{j}{n} + \frac{1}{r} - \frac{m}{n},$$
entonces la inmersión $W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$ es compacta.

Teorema C.11 ([4], Teorema 6.3)**.** *Sea Ω dominio limitado con $\partial\Omega \in C^1$, $j \in \mathbb{Z}^+$ y $1 \leq p < \infty$. Si $mp > n$, entonces la inmersión $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$ es compacta.*

Cociente de diferencia

Sea $A \subset\subset \Omega$ y $h_0 = \operatorname{dist}(A, \partial\Omega)$. Sea $u \in W^{j,p}(\Omega)$ para algún $j \geq 1$. Entonces definimos
$$u^h(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \quad (1 \leq i \leq n)$$
para $x \in A$, $0 < |h| < h_0$.

Lema C.1. *u^h esta bien definida para $x \in A$, $0 < |h| < h_0$ y se cumple*
$$\|u^h\|_{j-1,p,A} \leq \|u\|_{j,p,\Omega} \tag{C.2}$$
$$\lim_{h\to 0} \left\| u^h - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{j-1,p,A} = 0. \tag{C.3}$$

Lema C.2. *Sea Ω limitado y $u \in W_0^{j,p}(\Omega)$, extienda u por cero fuera de Ω. Entonces*
$$\|u^h\|_{j-1,p,\Omega} \leq \|u\|_{j,p,\Omega} \tag{C.4}$$
$$\lim_{h\to 0} \left\| u^h - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{j-1,p,\Omega} = 0. \tag{C.5}$$

Lema C.3. *Sea $u \in W^{j,p}(\Omega)$. Si existe un $C > 0$ tal que $\|u^h\|_{j,p,A} \leq C$ para todo $A \subset\subset \Omega$ y para todo h suficientemente pequeño, entonces $D_i u \in W^{j,p}(\Omega)$ y $\|D_i u\|_{j,p,\Omega} \leq C$.*

Apéndice $\mathcal{D}$

Potencial Newtoniano

Introducimos la *solución fundamental de la ecuación de Laplace*

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)|B(0,1)|}|x-y|^{2-n}, & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|, & n = 2. \end{cases}$$

Γ es armónica para $x \neq y$ y localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Sea $\Omega \subset R^n$ un dominio limitado, para una función f integrable en Ω el *potencial Newtoniano* de f, Nf, es definido como

$$(Nf)(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy.$$

Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Delta u(x)\, dx$. En particular para $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ con Ω limitado, tenemos

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Delta u(x)\, dx \quad \text{c.t.p } \Omega.$$

Teorema D.1 ([6], Teorema 9.9)**.** *Sea $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Entonces $Nf \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta(Nf) = f$ c.t.p y*

$$|Nf|_{2,p} \leq C\|f\|_p, \qquad C = C(n,p).$$

Corolario D.1 ([6], Corolario 9.10)**.** *Sea Ω es limitado, $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Entonces*

$$|u|_{2,p} \leq C\|\Delta u\|_p \tag{D.1}$$

donde $C = C(n,p)$.

Apéndice

$\mathcal{E}$

Espacio de Banach ordenado

Sea X un espacio de Banach real. Un cono positivo en X es un subconjunto cerrado X_+ de X tal que

$$X_+ + X_+ \subset X_+ \tag{E.1}$$

$$\mathbb{R}_+ \cdot X_+ \subset X_+ \tag{E.2}$$

$$X_+ \cap (-X_+) = \{0\} \tag{E.3}$$

$$X_+ - X_+ = X \tag{E.4}$$

Introducimos entonces un orden en X: $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in X_+$. Un espacio Banach X junto con un cono positivo es llamado un espacio de Banach real ordenado. Los elementos de X_+ son llamados positivos. Sea $x^* \in X^*$, entonces decimos que x^* es positivo y escribimos $x^* \geq 0$ si

$$\langle x^*, x \rangle \geq 0, \quad x \in X_+.$$

El conjunto $X_+^* = \{x^* \in X^* : x^* \geq 0\}$ es cerrado y satisface (E.1), (E.2) y (E.3). El cono X_+ es normal si verifica

$$\text{si } \ y \leq x \leq z \quad \text{entonces} \quad \|x\| \leq C \max\{\|y\|, \|z\|\}.$$

Teorema E.1 ([2], Proposición C.2). *El conjunto X_+^* es normal. El cono X_+ es normal si y sólo si $X_+^* - X_+^* = X^*$.*

Si X es un espacio de Banach ordenado real nosotros consideraremos tácitamente a la complexificación de X. Así un espacio de Banach ordenado es siempre la complexificación de un espacio de Banach ordenado real.

Sea X un espacio de Banach ordenado. Un operador lineal $T : X \to X$ es llamado *positivo* si $Tx \in X_+$ para todo $x \in X_+$. Entonces escribimos $T \geq 0$. Si $S, T : X \to X$ son lineales, escribimos $S \leq T$ si $T - S \geq 0$.

Si X_+ es normal, cualquier operador lineal positivo $T : X \to X$ es continuo. Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\text{si } \ 0 \leq S_1 \leq S_2 \quad \text{entonces} \quad \|S_1\| \leq C\|S_2\|, \tag{E.5}$$

donde $S_1, S_2 : X \to X$ son lineales ([2], Apéndice C).

Bibliografía

[1] Arendt W., Býnilan Ph. : *Wiener regularity and heat semigroups on spaces of continuous functions*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications Vol. 35. Birkhäuser Basel 1999, 29-49.

[2] Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. : *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Monographs in Mathematics. Birkhäuser Basel, (2001) ISBN 3-7643-6549-8.

[3] Arendt W., Schätzle R. : *Semigroups generated by elliptic operators in non-divergence form on* $C_0(\Omega)$. arXiv:1010.1703v1 - Oct 08 2010.

[4] Adams R, Fournier J. : *Sobolev Spaces*. Pure and applied mathematics Vol. 140. Elsevier 2003.

[5] Evans L. : *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Math. Soc., Providence R. I 1998.

[6] Gilbarg D., Trudinger N. : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in mathematics. Springer Berlin 2001.

[7] Lunardi A. : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Progress in nonlinear differential equations and their applications Vol. 16. Birkhauser Basel 1995.

[8] Minty G. J. : *On the extension of Lipschitz, Lipschitz-Hölder continuous, and monotone functions*. Bull. Amer. Math. Soc. 76 1970, 334-339.

[9] Nagel R., Engel K. : *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Graduate texts in mathematics 194. Springer New York 2000.

[10] Brezis H. : *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer New York 2010.

[11] Pazy, A. : *Semigroups of linear operatros and applicatiosn partial differential equations*. Applied mathematical sciences Vol. 44. Springer New York 1983.

[12] Avner, F. : *Partial differential equations*. Holt, Rinehart and Winston New York 1969.

[13] Widder D. : *The Laplace transform.* Princeton University Press 1946.

[14] Ya-Zhe Chen, Lan-Cheng Wu: *Second order elliptic equation and elliptic systems*. Trans. of mathematical monographs Vol. 174. AMS Providence R.I. 1998.

[15] Dautray R. : *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology Vol. 1*. Springer Berlin 1990.

[16] Marsden, J. y.: *Basic Complex Analysis*. W.H Freeman and Company San Francisco 1973.

[17] Agmon S. : *Lectures on Elliptic Boundary Value Problem*. D. Van Nostrand Co. Inc Princeton N. J. 1965.

[18] Agmon, S : *On the eigenfuntions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 15 1962, 119-147.

[19] Elon L. : *Curso de Analise vol. 2*. Projeto Euclides IMPA 2009.

[20] Cohn D. : *Measure theory*. Birkhäuser Boston 2013.

[21] Qing H., Fanghua L. : *Elliptic partial differential equations*. AMS, Courant Institute of Mathematical Sciences New York 2000.